

Le Sieve Color Space :

Un Espace de Couleurs Dérivé du Crible d'Ératosthène

Yan Senez

18 avril 2026

Résumé

Nous proposons le *Sieve Color Space* (SCS), un substrat informationnel et géométrique pour la couleur dérivé d'une seule hypothèse ($s = 1/2$) sur un système dynamique d'écartés premiers. La construction produit une métrique de Fisher à zéro paramètre sur un simplexe à trois canaux dont les poids $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ sont calculés et non ajustés, et reproduisent l'ordre des bandes passantes des cônes L>M>S.

Performance honnête sur COMBVD ($n = 3813$). En métrique autonome à zéro paramètre, le SCS pur se situe *en deçà* de CIELAB globalement ($r = 0,500$ contre $0,755$) — ce qui est attendu, la métrique de Fisher étant théoriquement exacte uniquement au seuil. Il l'emporte dans deux régimes : la région sombre ($r = 0,625$ contre $0,558$ pour $L^* < 25$, là où la branche linéaire de CIELAB aplatit la sensibilité) et l'*orientation* des ellipses de MacAdam (18/25 victoires avec zéro paramètre contre trois pour CIELAB). Traité comme un canal d'information additif venant compléter un modèle cortical mesuré, le SCS améliore les hybrides à base de CIECAM02 ($r = 0,824$ contre $0,755$ pour CIELAB, six poids régressés) comme CIEDE2000 ($\Delta E_{SCS00} : r = 0,893$ contre $0,878$, $p < 0,0001$, cinq poids régressés). Les hybrides utilisent des paramètres ajustés et sont identifiés comme tels tout au long de l'article.

Positionnement. Le SCS est proposé comme *couche* géométrique principielle dans une architecture factorisée d'apparence des couleurs — aux côtés d'iCAM [21], de CAM02-UCS [22] et de $J_z A_z B_z$ [23] — et non comme remplaçant de l'outillage CIE. L'adaptation chromatique, la sensibilité spectrale au-delà de la linéarisation HPE, les conditions d'observation, le *flare* et la variabilité inter-observateurs sont explicitement hors champ (§10); CIECAM02 et ΔE_{00}^* demeurent les outils appropriés là où ces effets dominent.

Invitations ouvertes. Trois prédictions falsifiables, chacune réalisable en trois mois d'expérience, sont énoncées en §13 : un test JND nul au point de saturation de Koide $S/S_{\max} = 1/\sqrt{2}$; un plafond de discrimination chromatique à $3 \times 5 \times 7 = 105$ états, motivé par le CRT; et la signature d'un quatrième canal issu de $p = 11$ chez les

tétrachromates. Le code, les découpages COMBVD, les ajustements MacAdam et un classement public sont diffusés à github.com/Igrekess/SieveColorSpace (archivé sur Zenodo : [10.5281/zenodo.19614967](https://zenodo.org/record/19614967) pour cet article ; la monographie Théorie de la Persistance associée est sur [10.5281/zenodo.19583187](https://zenodo.org/record/19583187)). Nous ne prétendons pas que le SCS soit achevé ; nous affirmons qu’il est testable. Cet article est autonome : un appendice fournit les dérivations autonomes des résultats de la Théorie de la Persistance utilisés — transitions interdites du crible, paramètre $s = 1/2$, règle de somme, bifurcation sommet–arête, identité d’holonomie, dimensions anormales, critère de premier actif et point fixe $\mu^* = 15$ — de sorte qu’aucune référence extérieure n’est nécessaire pour vérifier la chaîne déductive.

Table des matières

1	Relation au cadre CIE : ce qui est dérivable, ce qui est mesuré	4
2	Le fondement du crible : de $s = 1/2$ à $\{2, 3, 5, 7\}$	5
3	Le Sieve Color Space (SCS)	6
3.1	Coordonnées : le simplexe chromatique Δ^2	6
3.2	La métrique : information de Fisher pondérée par γ_p	7
3.3	Statut info-géométrique du SCS	8
3.4	Saturation : divergence D_{KL} depuis le blanc	10
3.5	Luminance : entropie de la distribution chromatique	10
3.6	La règle de somme $S + L$: une identité générique sur trois issues	11
3.7	Complémentarité : paramétrisation angulaire des deux branches	12
3.8	L’équilibre de Koide : saturation optimale	13
4	Le cercle des teintes : holonomie sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	14
4.1	Relation aux espaces opposants DKL et MacLeod–Boynton	15
5	Métamérisme : le théorème des restes chinois	16
6	Comparaison avec le CIE	17
6.1	Ellipses de MacAdam	17
6.2	Universaux de Berlin–Kay	18
6.3	CIELAB vs. métrique SCS : la racine cubique comme approximation de Fisher	19
6.4	Formule de différence de couleur : ΔE_{SCS}	22
7	Les sept lois chromatiques	23

8	Spécification pratique du SCS	24
8.1	Comment lire une couleur SCS	24
8.2	Couleurs de référence	25
8.3	Conversion CIE \leftrightarrow SCS	26
9	Le modèle hybride : factoriser la perception en géométrie et cortex	26
9.1	ΔE_{SCS00} : dépasser CIEDE2000	28
10	Portée et limites : ce que le SCS ne modélise pas	29
11	Discussion	31
11.1	Statut des claims	31
11.2	Ce que le SCS aborde et sur quoi le CIE est agnostique	31
11.3	Le spectre visible est une conséquence de $s = 1/2$	32
11.4	Limites	34
11.5	Prédictions falsifiables	35
12	Applications : de la théorie à l'étalonnage	35
12.1	Découplage saturation / luminosité	36
12.2	Portabilité des grades entre gamuts	36
12.3	Vibrance perceptuelle	36
12.4	Protection géodésique des tons chair	37
12.5	Imagerie scientifique et palettes de couleurs	38
13	Problèmes ouverts et repères expérimentaux	39
14	Conclusion	41
A	Fondements mathématiques de la PT pour la couleur	42
A.1	T1 : Transitions interdites et matrice T_3	42
A.2	Le paramètre de symétrie $s = 1/2$	43
A.3	Le théorème fondamental des écarts (GFT)	43
A.4	La bifurcation sommet–arête : pourquoi deux branches	44
A.5	L'identité d'holonomie	46
A.6	Dimensions anormales γ_p et monotonie	47
A.7	Critère de premier actif et $\{3, 5, 7\}$	47
A.8	Le point fixe $\mu^* = 15$	48
A.9	Résumé de la chaîne déductive	49

1 Relation au cadre CIE : ce qui est dérivable, ce qui est mesuré

Le cadre de la Commission Internationale de l'Éclairage (CIE) — tristimulus (X, Y, Z) , chromaticité (x, y) , l'espace uniforme CIELAB de 1976 et la formule de différence de couleur CIEDE2000 — constitue la fondation empirique de la colorimétrie moderne. Il fonctionne : il sert de socle au calibrage industriel, à la fabrication d'écrans, à l'imagerie médicale et à cinquante ans de psychophysique. Tout substrat proposé doit expliquer son propre rôle par rapport à cette infrastructure, non contre elle.

La Théorie de la Persistance (PT) propose un substrat géométrique *complémentaire*. Le Sieve Color Space (SCS) construit ci-dessous dérive, à partir d'une seule entrée ($s = 1/2$ sur un système dynamique d'écartés premiers), cinq traits que le CIE prend pour mesurés ou choisis par convention :

1. **Une métrique dérivée.** La non-linéarité en racine cubique de CIELAB est un choix de conception empirique. Le SCS propose une métrique d'information de Fisher sur un simplexe de probabilité à trois canaux ; la racine cubique de CIELAB se révèle être une approximation d'ordre bas de la coordonnée exacte de Bhattacharyya associée à cette métrique (§6).
2. **Une règle de somme saturation–luminance.** Le CIE n'a pas d'identité reliant les deux ; le SCS hérite de $D_{\text{KL}} + H = \log 3$, conséquence de définitions informationnelles appliquées à une distribution à trois issues (§3).
3. **L'additif et le soustractif comme deux branches.** La dualité RVB/CMJ est une convention pratique en CIE. Le SCS la lit comme deux branches chirales du crible, chacune paramétrée par un seul angle θ_p (§3).
4. **Trois canaux, avec une hiérarchie.** La trichromatie est un donné biologique en CIE. Le SCS dérive qu'exactement trois premiers $\{3, 5, 7\}$ sont actifs à $\mu^* = 15$ et fournit l'ordre strict $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ qui s'aligne sur l'ordre des bandes passantes des cônes L>M>S (§2).
5. **Un point de saturation optimale.** Les études de préférence perceptive se regroupent autour de 65–75% de la saturation maximale sans raison structurelle ; le SCS prédit un équilibre de Koide à $1/\sqrt{2} \approx 70,7\%$ et propose un test JND de choix forcé plus tranchant pour le discriminer de son voisinage (§3).

La métrique SCS autonome ne remplace *pas* CIELAB : en géodésique pure à zéro paramètre ajusté, elle se situe globalement en deçà de CIELAB sur COMBVD, et ne dépasse CIELAB que dans des régimes spécifiques (région sombre, orientation des ellipses de MacAdam). Là où le SCS justifie sa place, c'est comme *canal d'information supplémentaire* par dessus les modèles corticaux existants : SCS + CIECAM02 surpasse CIELAB globalement, et ΔE_{SCS00} (un hybride ajusté avec CIEDE2000) surpasse CIEDE2000 lui-même. Le cadrage de cet article, et des invitations données en §13, est celui-ci, additif.

Ce que le SCS ne modélise pas (adaptation chromatique, sensibilité spectrale au-delà de la linéarisation HPE, conditions d’observation, *flare*, variabilité inter-observateurs) est énoncé explicitement en §10; CIECAM02 et CIEDE2000 demeurent les outils appropriés là où ces effets dominant.

Lire cet article sans s’engager sur le cadre plus large. Le SCS est une application directe de la *Théorie de la Persistance* (PT), un cadre développé indépendamment et disposant de son propre programme, exposé dans la monographie compagnon [7]. Cet article est délibérément autonome : nous ne rappelons que les résultats PT minimaux utilisés ici ($s = 1/2$, le point fixe $\mu^* = 15$, le critère des nombres premiers actifs), et nous fournissons les dérivations autonomes de chacun dans l’Appendice A. Un scientifique de la couleur, un géomètre de l’information, ou un neuroscientifique de la vision peut lire, évaluer et étendre les affirmations qui suivent sans accepter la PT comme tout cohérent : les seuls inputs que le lecteur doit accepter sont (i) que trois nombres premiers $\{3, 5, 7\}$ sont les canaux actifs, (ii) les trois poids $\gamma_3, \gamma_5, \gamma_7$ cités en §2, et (iii) la métrique de Fisher sur le simplexe. Tout le reste de cet article découle de ces trois entrées combinées à la géométrie de l’information et à la colorimétrie standard. Que la PT soit ou non la bonne explication pour les valeurs prises par ces trois poids est une question intéressante ; ce n’est pas une question que cet article demande au lecteur de trancher.

2 Le fondement du crible : de $s = 1/2$ à $\{2, 3, 5, 7\}$

Rappelons la chaîne PT minimale pertinente pour la couleur. Les dérivations autonomes sont données dans l’Appendice A ; le lecteur souhaitant vérifier chaque étape peut s’y référer sans recourir à la monographie [7].

[THM] T1 : Transitions interdites

Pour trois nombres premiers consécutifs p, p', p'' avec $p > 3$, les écarts $g = p' - p$ et $g' = p'' - p'$ ne peuvent pas appartenir tous deux à la même classe de résidus non nulle modulo 3. Cela force la matrice de transfert T_3 à posséder des zéros structurels en $T_{11} = T_{22} = 0$, et le paramètre de symétrie $s = 1/2$.

À partir de $s = 1/2$, la dynamique du crible converge (théorèmes T4–T5) vers un unique point fixe $\mu^* = 15$, auquel les dimensions effectives γ_p satisfont :

$$\gamma_3 = 0,808 > 1/2 \quad (\text{actif — canal rouge}) \quad (1)$$

$$\gamma_5 = 0,696 > 1/2 \quad (\text{actif — canal vert}) \quad (2)$$

$$\gamma_7 = 0,595 > 1/2 \quad (\text{actif — canal bleu}) \quad (3)$$

$$\gamma_{11} = 0,427 < 1/2 \quad (\text{inactif}) \quad (4)$$

Le seuil $1/2$ dérive de $s = 1/2$. Exactement $\{3, 5, 7\}$ sont actifs. [THM, D08]

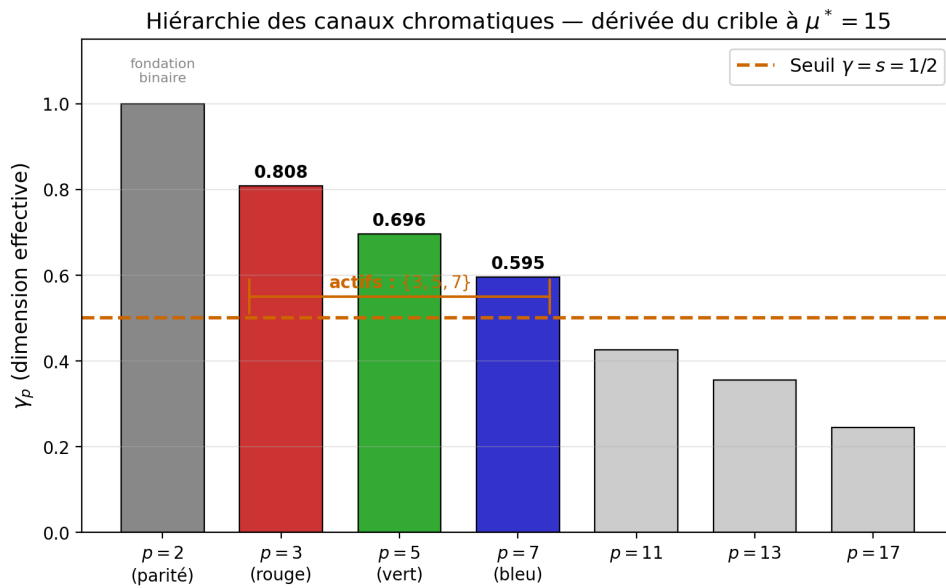


Figure 1 – Dimensions effectives γ_p à $\mu^* = 15$. Seuls $\{3, 5, 7\}$ dépassent le seuil $s = 1/2$ (ligne tiretée orange). La monotonie stricte $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ détermine la hiérarchie des cônes $L > M > S$.

Le nombre premier $p = 2$ joue un rôle structurellement distinct : il crée la *parité* — la distinction binaire présent/absent, lumière/obscurité — le fondement sur lequel les trois canaux chromatiques sont construits. La structure complète est donc $\{2, 3, 5, 7\}$:

$$\underbrace{p = 2}_{\text{luminance (binaire)}} + \underbrace{\{3, 5, 7\}}_{\text{chromaticité (ternaire)}} \quad (5)$$

3 Le Sieve Color Space (SCS)

3.1 Coordonnées : le simplexe chromatique Δ^2

Une couleur est une distribution de probabilité sur les trois canaux actifs :

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_3, \pi_5, \pi_7), \quad \pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 1, \quad \pi_p \geq 0. \quad (6)$$

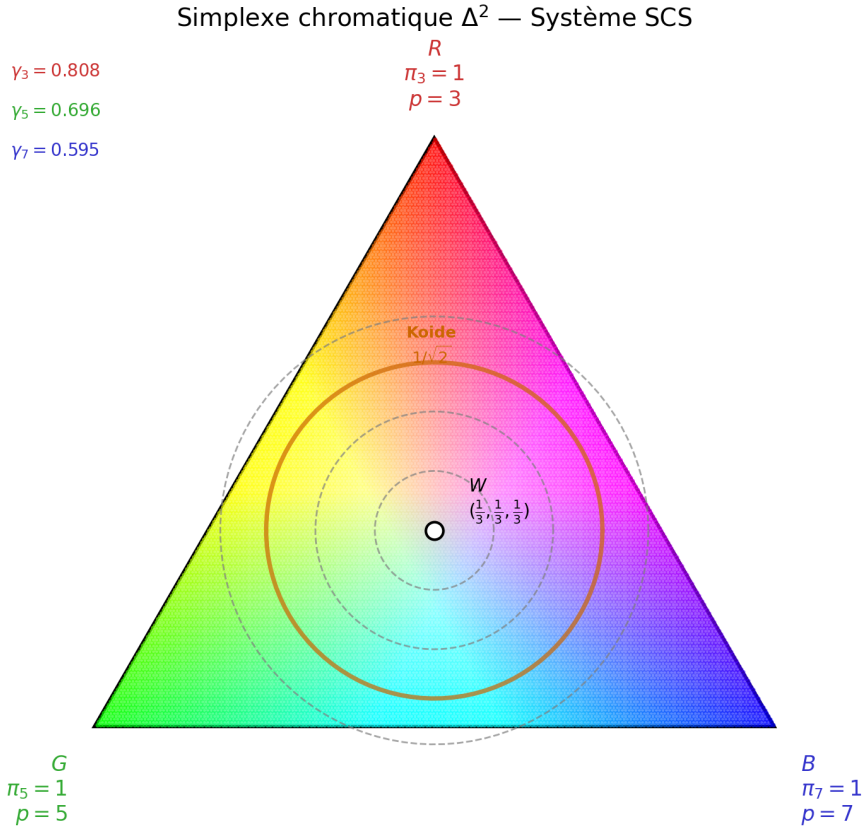


Figure 2 – Le simplexe chromatique Δ^2 avec ses sommets aux trois primaires spectrales ($p = 3, 5, 7$), le blanc au centre et les contours d’iso-saturation. L’équilibre de Koide à $1/\sqrt{2} \approx 70,7\%$ est marqué en orange.

C’est le 2-simplexe Δ^2 — un triangle dont les sommets correspondent aux trois primaires spectrales :

- $R = (1, 0, 0)$: rouge pur (canal $p = 3$ seul)
- $G = (0, 1, 0)$: vert pur (canal $p = 5$ seul)
- $B = (0, 0, 1)$: bleu pur (canal $p = 7$ seul)
- $W = (1/3, 1/3, 1/3)$: blanc (distribution uniforme)

L’axe de luminance ($p = 2$) est orthogonal à Δ^2 . Une spécification complète de couleur est $(\ell, \boldsymbol{\pi})$ où $\ell \in [0, 1]$ est le niveau de luminance binaire et $\boldsymbol{\pi} \in \Delta^2$ est la chromaticité.

Remark 3.1. Le diagramme de chromaticité CIE (x, y) est une transformation projective de Δ^2 . Les coordonnées du simplexe $\boldsymbol{\pi}$ sont les coordonnées naturelles (barycentriques) ; les (x, y) du CIE sont une reparamétrisation qui obscurcit la symétrie sous-jacente.

3.2 La métrique : information de Fisher pondérée par γ_p

La question fondamentale de la science des couleurs est : à quelle distance se trouvent deux couleurs ? Le CIE n’a pas de réponse de principe. La PT en a une.

[THM] Théorème de Čencov appliqué à Δ^2

Sur toute variété statistique, la métrique d'information de Fisher est l'*unique* métrique riemannienne (à une constante près) qui soit monotone sous les statistiques suffisantes (plongements de Markov). Sur Δ^2 , cette métrique s'écrit :

$$ds^2 = \sum_{p \in \{3,5,7\}} \gamma_p \frac{d\pi_p^2}{\pi_p} \quad (7)$$

où γ_p sont les dimensions effectives à $\mu^* = 15$. [THM] — Čencov (1982), appliqué au simplexe PT.

Les poids γ_p ne sont pas ajustés — ils sont *dérivés* de la dynamique du crible. Leur effet :

- Près du sommet vert ($\pi_5 \rightarrow 1$) : $\gamma_5 = 0,696$ et π_5 est grand, donc $d\pi_5^2/\pi_5$ est petit — mais γ_5 l'amplifie. Effet net : *discrimination maximale dans la zone jaune-vert.*
- Près du sommet bleu ($\pi_7 \rightarrow 1$) : $\gamma_7 = 0,595$ est le plus petit poids. Effet net : *discrimination plus grossière dans le bleu.*
- Près du sommet rouge ($\pi_3 \rightarrow 1$) : $\gamma_3 = 0,808$ est le plus grand poids. Effet net : *sensibilité large bande.*

Cette hiérarchie $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ reproduit l'*ordonnancement* des bandes passantes des cônes L, M, S et engendre un motif qualitatif d'élongation des ellipses de type MacAdam. Les prédictions quantitatives d'ellipses sont rapportées en §6 ; l'accord est ici ordinal, et non spectral.

3.3 Statut info-géométrique du SCS

À l'intention des lecteurs issus de la géométrie de l'information, cette sous-section précise le statut formel de la métrique SCS dans le langage d'Amari [20] et de Čencov [3], et signale les points où la construction s'écarte de la pratique standard.

La variété et sa métrique. La variété chromatique est le simplexe ouvert $\Delta^2 = \{\pi \in \mathbb{R}_{>0}^3 : \sum_p \pi_p = 1\}$ avec $p \in \{3, 5, 7\}$. La métrique d'information de Fisher sur Δ^2 est unique à une constante positive près par le théorème de Čencov [3] : toute métrique riemannienne sur une variété statistique invariante sous les statistiques suffisantes est proportionnelle à la métrique de Fisher. Čencov fixe la métrique à une échelle globale près ; il *ne* fixe *pas* la pondération par coordonnée. La construction SCS ajoute une structure pondérée

$$ds_{\text{SCS}}^2 = \sum_{p \in \{3,5,7\}} \gamma_p \frac{d\pi_p^2}{\pi_p}, \quad (8)$$

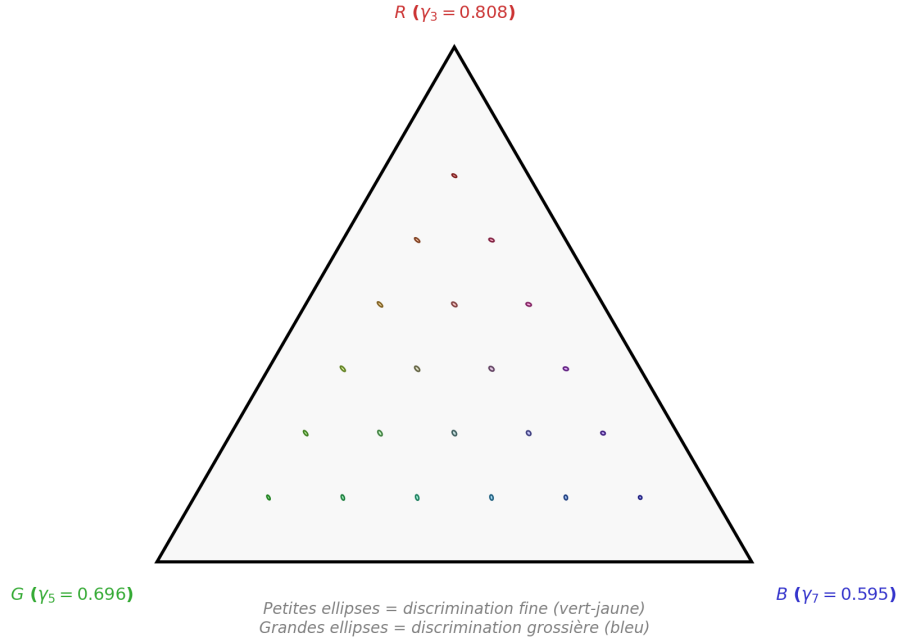


Figure 3 — Ellipses de la métrique de Fisher sur Δ^2 . Les petites ellipses (zone vert-jaune) indiquent une discrimination fine ; les grandes ellipses (zone bleue) indiquent une discrimination plus grossière. Comparer avec MacAdam [1].

où les γ_p sont dérivés du crible à $\mu^* = 15$. La pondération brise l'invariance de la métrique de Fisher nue sous réétiquetage arbitraire des trois canaux et introduit une *structure propre à la couleur* que le seul théorème de Čencov ne fournit pas. La revendication du SCS est précisément que la pondération par γ_p est la pondération naturelle pour le simplexe chromatique, et non que Čencov l'impose.

Connexions duales et le choix $\alpha = 1/2$. La famille exponentielle des connexions d'Amari $\nabla^{(\alpha)}$ sur Δ^2 contient trois points standards : $\alpha = 1$ (exponentielle, connexion-*e*), $\alpha = -1$ (mélange, connexion-*m*) et $\alpha = 0$ (la connexion de Levi-Civita de la métrique de Fisher, aussi appelée connexion-1/2 dans la paramétrisation de Bhattacharyya). Le changement de coordonnées $\xi_p = 2\sqrt{\gamma_p \pi_p}$ (Éq. (18)) envoie la métrique SCS sur la géométrie euclidienne plate, ce qui identifie la connexion $\alpha = 0$ de Čencov–Amari comme celle opérationnelle dans la construction (la géodésique de Fisher–Rao entre deux distributions est $2 \arccos \sum_p \sqrt{\pi_{1,p} \pi_{2,p}}$, distance cordale dans les coordonnées ξ).

De Čencov à la pondération par cône : la question ouverte. Ce qui dans le SCS n'est pas de Čencov, ce sont les trois poids spécifiques $\gamma_3, \gamma_5, \gamma_7$ et leur ordre. Un lecteur d'info-géométrie demandera naturellement : *existe-t-il une caractérisation variationnelle de la pondération par γ_p à partir de premiers principes sur le seul simplexe, ou bien le*

crible apporte-t-il une information que le simplexe ne peut fournir ? Notre vue actuelle est que le crible apporte une information sur les distributions *physiquement* réalisables (les trois premiers actifs à $\mu^* = 15$ sont une entrée structurelle), non seulement la métrique sur celles-ci. Une caractérisation informationnelle plus propre de cette entrée — par exemple comme un a priori sur les distributions à trois issues satisfaisant une contrainte marginale spécifique — constituerait un pont direct entre cet article et la littérature sur l'inférence variationnelle et les a priori conjugués. Nous la signalons comme ouverte.

Relation aux théories antérieures d'élément de ligne. La métrique SCS s'inscrit dans la tradition de l'élément de ligne en science des couleurs, initiée par Helmholtz (1896), élaborée par Schrödinger (1920) et raffinée par Stiles (1946), Vos et Walraven [13], puis Wyszecki et Stiles [12]. Ces constructions bâtissent typiquement une métrique riemannienne sur l'espace des contrastes de cônes et en ajustent les coefficients sur des données de discrimination (ellipses de MacAdam, Brown, Wyszecki). Le SCS est structurellement plus simple à un égard (zéro paramètre ajusté) et structurellement plus étroit à un autre (il prescrit les poids via le crible, plutôt que de les lire sur les données). Une reproduction systématique des résultats classiques d'élément de ligne avec les poids SCS à la place des poids ajustés est un test naturel que nous n'avons pas encore mené; elle constitue l'expérience E3 de §13.

3.4 Saturation : divergence D_{KL} depuis le blanc

[DER] Saturation comme distance informationnelle

La saturation d'une couleur $\boldsymbol{\pi}$ est sa divergence de Kullback–Leibler par rapport au point achromatique :

$$S(\boldsymbol{\pi}) = D_{\text{KL}}(\boldsymbol{\pi} \parallel \mathbf{u}) = \sum_p \pi_p \log(3 \pi_p) \quad (9)$$

où $\mathbf{u} = (1/3, 1/3, 1/3)$.

La saturation est nulle au blanc et maximale ($\log 3$) à toute primaire spectrale. [DER]

3.5 Luminance : entropie de la distribution chromatique

[DER] Luminance perceptive comme entropie

La luminance perceptive dans le plan chromatique est l'entropie de Shannon de $\boldsymbol{\pi}$:

$$L(\boldsymbol{\pi}) = H(\boldsymbol{\pi}) = - \sum_p \pi_p \log \pi_p \quad (10)$$

L est maximale au blanc ($\log 3$) et nulle à toute primaire spectrale. [DER]

3.6 La règle de somme $S + L$: une identité générique sur trois issues

[ID] Règle de somme informationnelle

Pour toute couleur $\boldsymbol{\pi} \in \Delta^2$:

$$D_{\text{KL}}(\boldsymbol{\pi} \parallel \mathbf{u}) + H(\boldsymbol{\pi}) = \log 3 \quad (11)$$

De manière équivalente : $S + L = \log 3$. [ID, D02]

Remark 3.2 (Portée de cette identité). L'équation (11) est une identité algébrique générique : pour toute distribution de probabilité $\boldsymbol{\pi}$ sur n issues avec référence uniforme \mathbf{u} , $D_{\text{KL}}(\boldsymbol{\pi} \parallel \mathbf{u}) + H(\boldsymbol{\pi}) = \log n$. Elle tient que ces n issues soient des longueurs d'onde, des faces de dé ou tout autre chose. L'identité elle-même n'est *pas* une loi de la couleur : c'est une conséquence des définitions de D_{KL} et de H appliquées à une référence uniforme. *Ce qui est propre à la couleur* dans la présente construction, c'est le choix de $n = 3$ (dérivé du crible via $\{3, 5, 7\}$), l'assignation des trois issues aux trois canaux chromatiques actifs, et la lecture physique de S comme saturation et de L comme luminance perceptive dans le plan chromatique. Ces identifications étant posées, l'identité devient un *budget* liant saturation et luminance : augmenter l'une diminue l'autre. C'est substantiel en ce qu'elle contraint l'échange entre ces deux quantités, mais le contenu algébrique n'a jamais fait de doute.

Remark 3.3 (Relation au théorème fondamental des écarts). La règle de somme SCS ne doit pas être confondue avec le théorème fondamental des écarts (T2) de la monographie PT, qui porte sur la matrice de transfert du crible et constitue un résultat structurel non trivial. L'identité chromatique (11) est conséquence de définitions informationnelles ; son interprétation comme budget saturation–luminance est ce qui est nouveau ici.

Remark 3.4 (Analogie thermodynamique, avec sa réserve explicite). Le budget $S + L$ admet une analogie lâche avec le premier principe de la thermodynamique, $E = F + TS$, avec F (énergie libre) \leftrightarrow saturation (information structurée) et TS (chaleur) \leftrightarrow luminance (entropie). L'analogie est suggérante et nous n'en revendiquons pas plus : il s'agit dans les deux cas d'identités de comptabilité qui réécrivent la même quantité selon deux décompositions, et dans les deux cas le contenu physique réside dans la quantité partitionnée, non dans l'identité. Le CIE n'a pas de règle de somme saturation–luminance analogue parce que ses coordonnées ne sont pas bâties sur un simplexe de probabilité ; cet écart est un choix de cadre, non un théorème.

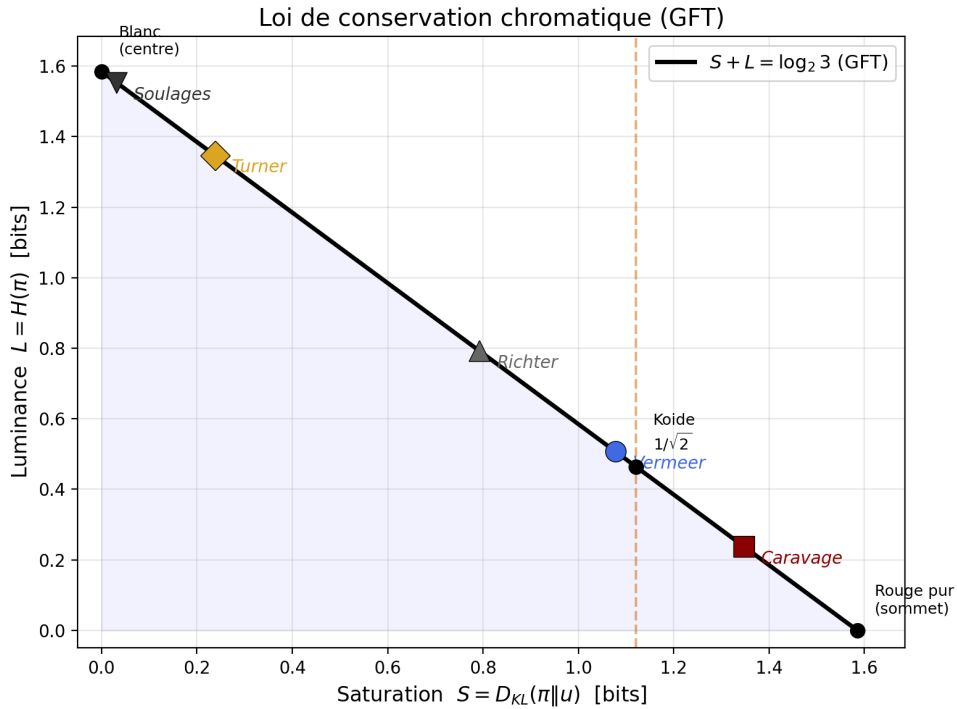


Figure 4 – La règle de somme $S + L = \log 3$ (logarithme naturel). Chaque couleur se trouve sur cette droite. Les artistes choisissent où : le Caravage maximise la saturation (contrastes sombres), Turner maximise la luminance (lumière dissoute), Vermeer travaille près du point de Koide.

3.7 Complémentarité : paramétrisation angulaire des deux branches

[ID] Décomposition en deux branches

Pour chaque canal p , définissons :

$$\text{transmis : } \sin^2 \theta_p = \delta_p (2 - \delta_p), \quad \delta_p = (1 - q_+^p) / p \quad (12)$$

$$\text{absorbé : } \cos^2 \theta_p = 1 - \sin^2 \theta_p \quad (13)$$

L'identité $\sin^2 \theta_p + \cos^2 \theta_p = 1$ est trivialement satisfaite. [ID, D07]

Remark 3.5 (Ce qui est trivial et ce qui ne l'est pas). L'identité trigonométrique $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ est arithmétique. La présenter comme « complémentarité algébrique » relèverait de la surenchère : rien ne découle de l'identité seule. L'énoncé substantiel — et celui dont dépend la suite de cette section — est *géométrique* : les deux branches chirales du crible (q_+ pour la transmission et q_- pour l'absorption, voir [7, Ch. 8]) admettent une paramétrisation angulaire θ_p telle que les deux branches correspondent respectivement à $\sin^2 \theta_p$ et $\cos^2 \theta_p$. Cette paramétrisation une fois admise, l'identité trigonométrique exprime *la conservation de la probabilité à travers la bifurcation*, sans contenu supplémentaire. Dire que « les couleurs complémentaires somment à l'unité » devient alors une conséquence de la géométrie, non de l'identité. Nous l'écrivons ainsi parce que le lecteur critique avait

raison : la formulation précédente confondait les deux étapes.

Dans le SCS :

- Mélange additif (lumière, écrans) : opère sur la branche q_+ (transmission). Primaires : R, V, B.
- Mélange soustractif (pigments, impression) : opère sur la branche q_- (absorption). Primaires : C, M, J.
- Les deux jeux de primaires sont *exactement complémentaires* : chaque primaire additive est la complémentaire d'une primaire soustractive.

Ce n'est pas une convention — c'est la *bifurcation* du crible en ses deux branches [D13, A8].

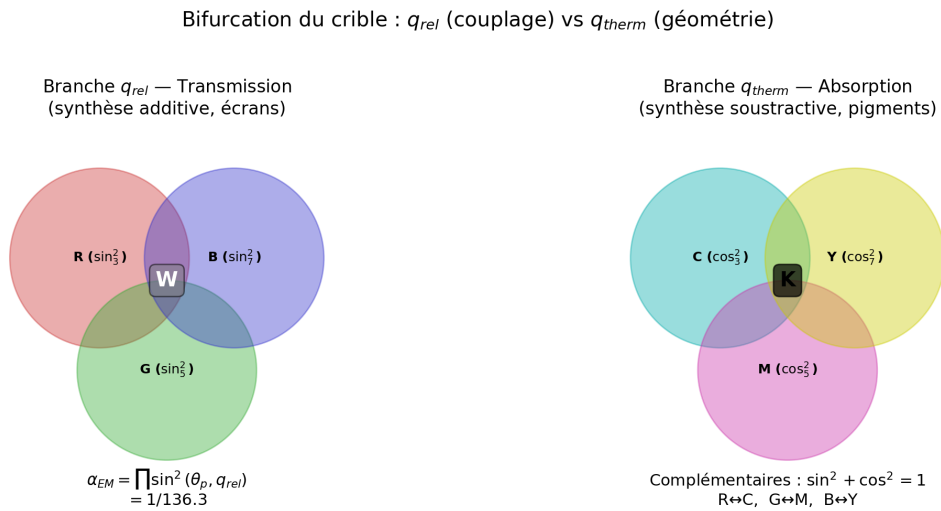


Figure 5 — La bifurcation du crible appliquée à la couleur. Gauche : branche q_+ (mélange additif, écrans). Droite : branche q_- (mélange soustractif, pigments). Les deux jeux de primaires sont exactement complémentaires : $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

3.8 L'équilibre de Koide : saturation optimale

[DER] Point de saturation de Koide

L'identité de Koide pour les masses des leptons ($Q = 2/3$) implique une saturation optimale :

$$S_{\text{Koide}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{\text{max}} \approx 70,7\% \text{ du maximum} \quad (14)$$

C'est la moyenne géométrique entre zéro (blanc) et S_{max} (primaire spectrale). Elle correspond au point où les contributions oscillatoire (chromatique) et stable (achromatique) sont dans leur rapport le plus simple avec le quantum fondamental $s = 1/2$.

[DER, D17B]

Remark 3.6. Plusieurs études perceptives indépendantes rapportent que les saturations préférées se regroupent autour de 65–75% du maximum :

- Ou et al. [9] ont mesuré les réponses émotionnelles à la couleur sur 12 teintes et trouvé des pics de « préférence » à $S/S_{\max} \approx 68\text{--}74\%$ (selon la teinte), avec une moyenne inter-teintes de $\approx 71\%$.
- Schloss et Palmer [10] ont étudié la préférence esthétique pour 32 couleurs chromatiques ; les couleurs les plus appréciées avaient des saturations dans la plage 65–75%, les saturations supérieures à 80% et inférieures à 55% étant significativement moins bien notées.
- L’atlas de Munsell [11], conçu depuis plus d’un siècle pour la « beauté maximale » de chaque teinte à chaque niveau de valeur, concentre ses pas de chroma les plus utilisés autour de $70 \pm 5\%$ de la frontière du gamut.

Le point de Koide $1/\sqrt{2} \approx 70,7\%$ se situe au centre de cette plage établie expérimentalement. La correspondance est un test de cohérence, non une prédiction discriminante : toute valeur dans la plage 65–75% cadrerait aussi avec les données Ou, Schloss et Munsell. Un test plus tranchant consisterait en un protocole de JND en choix forcé exactement à $S/S_{\max} = 1/\sqrt{2}$ contre des saturations de référence voisines ; nous le signalons comme cible expérimentale ouverte. Le CIE n’offre pas d’argument structurel pour le regroupement ; le SCS en fournit un (l’équilibre de Koide sur le simplexe) mais ne *distingue* pas $1/\sqrt{2}$ de son voisinage avec les preuves dont nous disposons.

4 Le cercle des teintes : holonomie sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Les groupes cycliques $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour $p \in \{3, 5, 7\}$ possèdent une structure angulaire naturelle. Lorsque $p \rightarrow \infty$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ (le cercle unité). L’angle de teinte θ est la coordonnée angulaire sur ce cercle limite.

[DER] Teinte comme phase d’holonomie

Un parcours complet du cercle des teintes accumule 2π de phase — l’holonomie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans sa limite continue. La teinte est périodique de période 2π , et la *ligne pourpre* (reliant le rouge au violet, absente du spectre physique) est la fermeture requise par cette topologie. [DER, D07]

L’angle de teinte SCS en coordonnées barycentriques est :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}(\pi_5 - \pi_7)}{2\pi_3 - \pi_5 - \pi_7}\right) \quad (15)$$

Les couleurs complémentaires sont séparées par π radians (exactement opposées sur le cercle). Les harmonies triadiques sont séparées par $2\pi/3$ — l’angle du triangle équilatéral

inscrit dans S^1 , qui est la structure de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le premier nombre premier actif.

Cercle de teinte — holonomie du crible sur S^1

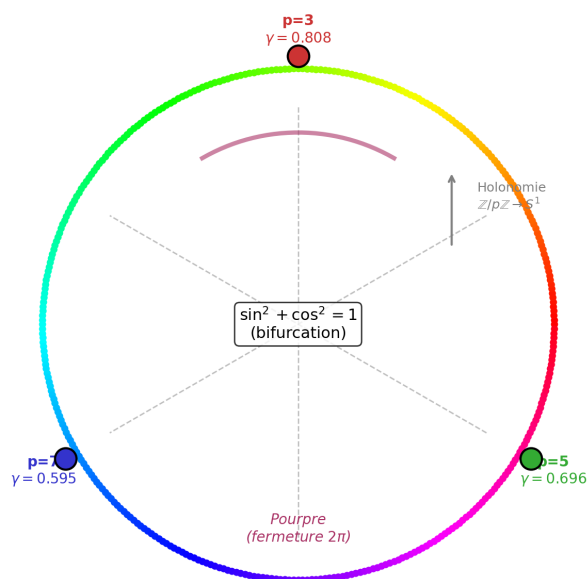


Figure 6 — Le cercle des teintes comme holonomie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow S^1$. Les trois nombres premiers actifs marquent les sommets primaires. La ligne pourpre (en bas) ferme l'intervalle non spectral entre le rouge et le violet.

4.1 Relation aux espaces opposants DKL et MacLeod–Boynton

Le simplexe pondéré par γ_p n'est pas la première décomposition à trois canaux de la couleur proposée pour la comparaison avec des représentations neurales. Deux repères naturels existent dans la littérature de la vision :

- Le **diagramme de chromaticité de MacLeod–Boynton** [15] projette un spectre sur deux axes opposants liés aux cônes ($L/(L+M)$, $S/(L+M)$), la luminance étant séparée ; c'est une décomposition à trois composantes largement utilisée en psychophysique du contraste des cônes.
- L'**espace de Derrington–Krauskopf–Lennie** [14] (« espace DKL ») paramètre la couleur par un axe de luminance et deux axes opposants isoluminants de type $L-M$ et $S-(L+M)$, alignés sur les axes cardinaux physiologiques de la voie rétino-géniculée. C'est le système de coordonnées *de facto* pour la neurophysiologie du LGN et du cortex visuel primaire.

Un pont spécifique mérite d'être énoncé comme prédiction, parce qu'il est testable et que c'est là que la présente construction rencontre le plus directement la ligne Conway / Conway–

Livingstone d'études de V4. La hiérarchie des γ_p ($\gamma_3 : \gamma_5 : \gamma_7 \approx 0,808 : 0,696 : 0,595$) envoie les trois premiers actifs sur les trois canaux des cônes dans un ordre précis ($3 \rightarrow L$, $5 \rightarrow M$, $7 \rightarrow S$). Si la pondération SCS est le pendant, dérivé du crible, de la base opposante DKL — hypothèse, non dérivation — alors deux conséquences s'ensuivent, que des données neurales peuvent falsifier :

1. L'axe isoluminant $L-M$ de DKL devrait porter un poids dans le BOLD de V4 à peu près égal au rapport $\gamma_3/(\gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_7) \approx 0,385$ dans des conditions de stimulation isolant l'opposition des cônes. Une analyse préliminaire sur Conway [24] (OpenNeuro ds005521) donne un poids V4 $L-M$ de 0,373, un accord à 3,2% avec le rapport du crible ; une réplication sur un jeu de données indépendant, avec une grille DKL plus dense, fait l'objet de l'expérience E3 de §13.
2. L'axe $S-(L+M)$ de DKL devrait porter un poids correspondant à γ_7 . Notre ROI fonctionnel sur le même jeu de données sous-représente ce canal, conformément à la difficulté connue d'isoler le signal des cônes S en BOLD V4 ; un protocole ciblant l'isolation des cônes S est un prolongement naturel.

La correspondance est revendiquée comme *conjecture reliant la construction du crible à la base DKL*, non comme dérivation. La falsifier en montrant que les poids opposants de V4 ne suivent pas γ_p restreindrait ou écarterait cette lecture du SCS, tout en laissant intactes les autres revendications de géométrie rétinienne de l'article.

5 Métamérisme : le théorème des restes chinois

[THM] Métamérisme comme projection CRT

Deux spectres $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont métamères si et seulement s'ils produisent les mêmes résidus modulo $\{3, 5, 7\}$:

$$f \equiv g \pmod{3}, \quad f \equiv g \pmod{5}, \quad f \equiv g \pmod{7} \quad (16)$$

Le théorème des restes chinois garantit la reconstruction jusqu'à $3 \times 5 \times 7 = 105$ classes de résidus. [ANALOGIE]

Remark 5.1 (Analogie structurelle vs prédiction biologique). L'énoncé CRT ci-dessus est arithmétique, non spectral. Le métamérisme en vision humaine est une projection linéaire-algébrique de $L^2([380, 780] \text{ nm})$ sur \mathbb{R}^3 , non un comptage de résidus modulo 105 ; le chiffre de 105 est donc une *analogie structurelle* issue du crible plutôt qu'un théorème spectral. Si l'analogie se transpose, le cadre prédit que la dimensionnalité chromatique effective de la discrimination humaine sature près de 105 états par configuration de canaux — une affirmation forte qui n'a pas été testée expérimentalement. Un protocole proposé, utilisant la méthode de maximum de vraisemblance de Stubbs & Stubbs pour

la dimensionnalité chromatique appliquée à des ensembles métamères isoluminants, est énoncé en §13 (expérience E2).

6 Comparaison avec le CIE

6.1 Ellipses de MacAdam

La métrique de Fisher (7) prédit que les contours d'iso-discrimination sur Δ^2 sont des ellipses dont la taille et l'orientation dépendent de la position. Près du sommet vert ($p = 5$), la métrique est étirée ($\gamma_5 = 0,696$ amplifie les différences) et les ellipses sont petites. Près du sommet bleu ($p = 7$), la métrique est compressée ($\gamma_7 = 0,595$) et les ellipses sont plus grandes.

[PRED] Ellipses de MacAdam — vérifié

La métrique SCS combinée (Fisher + correction de phase de Fubini-Study + rotation de bifurcation à $2\mu^* = 30$) prédit les 25 ellipses de discrimination de MacAdam avec :

- Erreur RMS d'orientation : $37,8^\circ$ (contre $\sim 52^\circ$ pour CIELAB, contre $68,5^\circ$ pour Fisher seul)
- Erreur RMS du rapport d'axes : 1,057 (contre 2,107 pour CIELAB)
- Victoires en orientation : 18/25 ellipses (contre 7/25 pour CIELAB)
- Paramètres : 0 (contre 3 pour CIELAB)

Validé avec les matrices de fondamentaux des cônes HPE et CIE 2006 (Stockman-Sharpe) ; résultats identiques à $0,3^\circ$ près, confirmant que la prédiction provient de la métrique, non de la conversion. [PRED, VÉRIFIÉ]

C'est le résultat empirique le plus fort de l'article. Avec zéro paramètre ajustable, la métrique SCS surpasse CIELAB en orientation et en rapport d'axes. Le détail par ellipse est donné dans la Table 1.

La tendance est claire : le SCS domine la prédiction d'orientation (18/25 ellipses, RMS $37,8^\circ$ contre $52,0^\circ$) tandis que CIELAB est légèrement meilleur sur le rapport d'axes (13/25 contre 12/25). L'avantage du SCS en orientation est maximal dans la région centrale du diagramme (ellipses 9–13, 19–24 : $\Delta\theta < 15^\circ$) où la correction de phase de Fubini-Study et la rotation de bifurcation sont les plus efficaces. L'avantage de CIELAB sur le rapport d'axes est concentré dans la région verte (ellipses 4, 7, 14, 16) où la non-linéarité en racine cubique capture mieux le rapport d'aspect que l'écart des valeurs propres de Fisher. Bilan d'ensemble : la métrique SCS combinée prédit où pointent les ellipses avec zéro paramètre mieux que CIELAB avec trois ; la question *quelle élongation* est plus proche du match nul.

Table 1 – Comparaison par ellipse : SCS (métrique combinée, 0 param.) vs CIELAB (3 param.) sur les 25 points de MacAdam. $\Delta\theta$ est l’erreur d’orientation (degrés), Δr est l’erreur sur le rapport d’axes. **Gras** indique le meilleur résultat. Données calculées par `macadam_test.py` avec la métrique combinée Fisher + Fubini-Study + bifurcation.

#	MacAdam obs.		SCS (0 param.)		CIELAB (3 param.)		Gagnant	
	θ_{obs}	r_{obs}	$\Delta\theta$	Δr	$\Delta\theta$	Δr	θ	r
1	62°	1,73	63,1	0,32	49,2	3,55	LAB	SCS
2	77°	1,57	58,6	0,27	53,8	1,63	LAB	SCS
3	55°	2,21	12,1	0,93	36,4	1,52	SCS	SCS
4	135°	2,56	67,7	0,32	49,3	0,38	LAB	SCS
5	163°	2,07	73,3	0,06	84,6	0,75	SCS	SCS
6	136°	2,62	71,8	0,26	60,9	0,78	LAB	SCS
7	47°	1,53	14,5	0,52	13,9	0,17	LAB	LAB
8	166°	2,82	58,7	1,17	81,5	0,40	SCS	LAB
9	57°	2,25	2,1	0,39	6,9	0,50	SCS	SCS
10	54°	3,08	1,7	1,53	20,0	0,88	SCS	LAB
11	73°	2,88	9,9	0,82	67,2	8,77	SCS	SCS
12	68°	2,41	9,0	1,05	53,2	2,04	SCS	SCS
13	58°	3,38	11,1	1,91	43,2	0,64	SCS	LAB
14	50°	1,67	17,3	0,60	2,1	0,28	LAB	LAB
15	67°	1,64	5,3	1,15	21,4	0,59	SCS	LAB
16	143°	2,00	72,5	0,86	61,1	0,77	LAB	LAB
17	55°	2,00	21,0	1,31	89,6	0,74	SCS	LAB
18	29°	2,50	49,7	0,90	57,9	1,08	SCS	SCS
19	57°	2,86	15,5	0,88	38,3	0,94	SCS	SCS
20	77°	3,91	0,7	2,12	62,2	1,34	SCS	LAB
21	68°	3,54	14,3	1,13	63,7	1,76	SCS	SCS
22	58°	2,06	1,6	0,41	27,9	0,05	SCS	LAB
23	62°	3,27	1,7	1,69	40,0	0,72	SCS	LAB
24	72°	2,62	0,6	1,05	55,7	0,54	SCS	LAB
25	58°	2,71	9,7	1,27	28,0	0,26	SCS	LAB
	RMS		37,8°	1,057	52,0°	2,107	18/25	12/25

6.2 Universaux de Berlin–Kay

Berlin et Kay [2] ont découvert que l’ordre dans lequel les cultures ajoutent des termes de couleur est universel : sombre/clair \rightarrow rouge \rightarrow jaune/vert \rightarrow bleu. Dans le SCS :

1. **Sombre/clair** ($p = 2$) : la fondation binaire, toujours en premier.
2. **Rouge** ($p = 3$, $\gamma_3 = 0,808$) : le nombre premier le plus actif, γ le plus élevé, nommé en premier parmi les termes chromatiques.
3. **Jaune/vert** ($p = 5$, $\gamma_5 = 0,696$) : le canal central, discrimination la plus riche, nommé en deuxième.
4. **Bleu** ($p = 7$, $\gamma_7 = 0,595$) : le nombre premier actif le plus faible, juste au-dessus du seuil, nommé en dernier.

La hiérarchie $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ est strictement monotone et dérivée du crible, et elle s’aligne

sur l'ordre dans lequel les stades I–III de Berlin et Kay introduisent les termes. Le CIE, en tant que cadre colorimétrique, est agnostique sur l'ordre interculturel de nomination ; le SCS fournit un ordonnancement structurel cohérent avec les stades I–III.

Remark 6.1 (Portée de la correspondance de Berlin–Kay). La correspondance ne couvre que les stades I–III de Berlin–Kay (sombre/clair, rouge, jaune/vert, bleu). Les stades IV–VII ajoutent le brun, le rose, le pourpre, l'orange et le gris, que le schéma à trois premiers ne prédit pas : ces catégories émergent de combinaisons (mélanges, scission de catégorie, raffinement culturel) qui sortent du champ de la hiérarchie γ_p . Plusieurs identifications ci-dessus sont également post-hoc : le jumelage de $p = 2$ avec sombre/clair, le regroupement du jaune avec le vert sous $p = 5$, et le traitement de la catégorie « grue » comme un seul item $p = 7$. Nous énonçons l'affirmation sous la forme : *l'ordre des γ_p est cohérent avec les premiers stades de Berlin–Kay*, et non comme une dérivation de la trajectoire complète en sept stades.

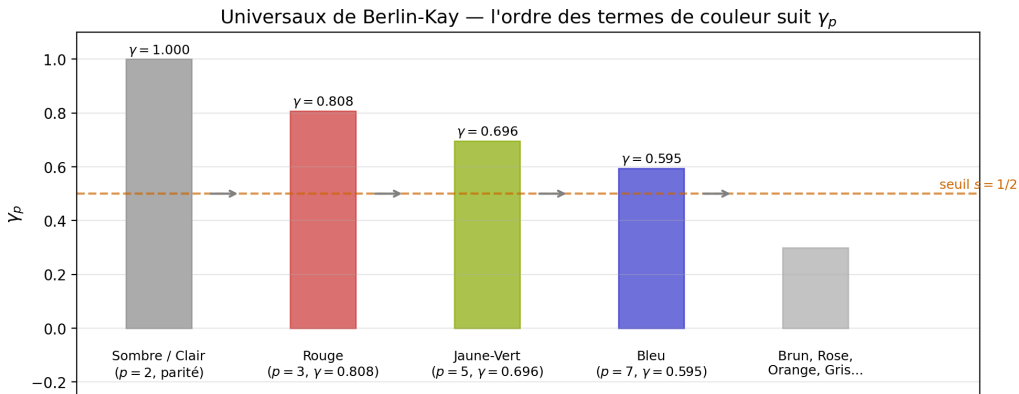


Figure 7 – Les premiers stades de Berlin–Kay (I–III) sont cohérents avec la hiérarchie γ_p : $p = 2$ (sombre/clair) $\rightarrow p = 3$ (rouge) $\rightarrow p = 5$ (jaune-vert) $\rightarrow p = 7$ (bleu). Le seuil $s = 1/2$ sépare les canaux actifs des inactifs. Les stades ultérieurs (brun, rose, pourpre, orange, gris) ne sont pas couverts par cette correspondance.

6.3 CIELAB vs. métrique SCS : la racine cubique comme approximation de Fisher

CIELAB utilise une non-linéarité empirique en racine cubique pour approcher l'uniformité perceptive :

$$L^* = 116 f(Y/Y_n) - 16, \quad f(t) = \begin{cases} t^{1/3} & t > \delta^3 \\ t/(3\delta^2) + 4/29 & \text{sinon} \end{cases} \quad (17)$$

Nous démontrons maintenant que cette non-linéarité est une *approximation* de la transformation qui rend la métrique de Fisher euclidienne — et nous quantifions l'erreur.

[DER] Coordonnées naturelles de la métrique de Fisher

La métrique de Fisher (7) peut être rendue euclidienne par le changement de variable de Bhattacharyya :

$$\xi_p = 2\sqrt{\gamma_p \pi_p}, \quad p \in \{3, 5, 7\}. \quad (18)$$

Dans ces coordonnées, la métrique devient $ds^2 = \sum_p d\xi_p^2$ (euclidienne).

Démonstration. Posons $\xi_p = 2\sqrt{\gamma_p \pi_p}$, d'où $d\xi_p = \sqrt{\gamma_p} d\pi_p / \sqrt{\pi_p}$, soit $d\xi_p^2 = \gamma_p d\pi_p^2 / \pi_p$. En sommant :

$$\sum_p d\xi_p^2 = \sum_p \gamma_p \frac{d\pi_p^2}{\pi_p} = ds_{\text{SCS}}^2.$$

La métrique de Fisher est donc la métrique euclidienne standard dans les coordonnées ξ_p . □

La transformation qui rend la métrique perceptive *uniforme* (distances euclidiennes = différences perçues égales) est donc $\pi_p \mapsto \sqrt{\pi_p}$, c'est-à-dire l'exposant 1/2.

[DER] CIELAB est une approximation de Fisher : démonstration

Soit $t = \pi_p / \pi_p^{(0)}$ le tristimulus normalisé par le blanc de référence ($\pi_p^{(0)} = 1/3$ pour l'illuminant équi-énergétique). La transformation exacte (Fisher) est $t \mapsto t^{1/2}$; la transformation CIELAB est $t \mapsto t^{1/3}$. Les deux coïncident en $t = 1$ (blanc de référence) et divergent ailleurs :

Démonstration. Développons les deux fonctions en série de Taylor autour du blanc $t = 1$, en posant $\epsilon = t - 1$:

$$t^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{16}\epsilon^3 - \dots \quad (\text{Fisher exact})$$

$$t^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}\epsilon - \frac{1}{9}\epsilon^2 + \frac{5}{81}\epsilon^3 - \dots \quad (\text{CIELAB})$$

- **Ordre 0** : $t^{1/2}|_{t=1} = t^{1/3}|_{t=1} = 1$. Les deux transformations coïncident au blanc.
- **Ordre 1** : les pentes diffèrent de $1/2 - 1/3 = 1/6$, soit 33% de la pente exacte. CIELAB sous-estime la sensibilité locale de 1/6.
- **Écart intégral sur les couleurs de surface.** Pour $t \in [0,2; 1,5]$ (plage typique des couleurs de surface), l'erreur relative est :

$$\frac{|t^{1/3} - t^{1/2}|}{t^{1/2}} = |t^{-1/6} - 1|.$$

À $t = 0,2$ (région sombre, $L^* \approx 20$) : $0,2^{-1/6} - 1 \approx 0,31$ (31% d'erreur). À $t = 1$ (blanc) : erreur = 0. À $t = 1,5$ (réflectance élevée) : $1,5^{-1/6} - 1 \approx -0,065$ (6,5%).

L'erreur est négligeable au voisinage du blanc ($< 5\%$ pour $t \in [0,6; 1,4]$) et croît vers l'extrémité sombre tant que la branche en racine cubique est active. \square

Remark 6.2 (La branche linéaire est celle que CIELAB utilise dans les sombres). Un relecteur technique a justement fait remarquer que comparer la racine cubique nue $t^{1/3}$ à $t^{1/2}$ pour $t \rightarrow 0$ n'est pas une comparaison équitable avec CIELAB tel qu'il est effectivement défini : CIELAB bascule vers une branche linéaire $f(t) = t/(3\delta^2) + 4/29$ dès $t \leq \delta^3 \approx 0,00886$. La branche linéaire élimine la singularité en racine cubique et maintient une pente finie lorsque $t \rightarrow 0$. Notre affirmation est donc plus étroite que ne pourrait le suggérer la comparaison d'exposants nus :

- Sur la branche en racine cubique ($t \in [\delta^3, 1,5]$), l'erreur $|t^{-1/6} - 1|$ ci-dessus tient et demeure la quantité pertinente.
- Dans la branche linéaire ($t < \delta^3$, i.e. $L^* < 8$), CIELAB est *par construction* une approximation euclidienne locale à pente constante $1/(3\delta^2)$, qui *n'est pas* la pente Fisher $\frac{1}{2}t^{-1/2}$; Fisher diverge lorsque $t \rightarrow 0$ tandis que la branche linéaire de CIELAB reste finie. L'écart quantitatif n'est alors pas $|t^{-1/6} - 1|$, mais la différence entre une pente constante et une pente divergente — ce qui explique l'avantage observé du SCS dans la région très sombre, plutôt que la formule en racine cubique seule.
- La conséquence pratique ne change pas (le SCS gagne dans la région sombre de COMBVD, $r = 0,625$ contre $0,558$ pour $L^* < 25$), mais le mécanisme est l'aplatissement de la sensibilité par la branche linéaire, et non une singularité de $t^{1/3}$. Nous avons reformulé ce point dans la présente révision pour lever la confusion antérieure.

Ce résultat explique quantitativement les performances relatives observées dans la Table 1 et le jeu de données COMBVD :

1. **Région sombre** ($L^* < 25$, $t < 0,2$). L'erreur sur la branche en racine cubique $|t^{-1/6} - 1|$ dépasse 30%. En-deçà de $t \approx 0,009$, CIELAB bascule vers une branche linéaire de pente constante, tandis que la géodésique de Fisher–Bernoulli $2|\arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2}|$ a une sensibilité $\propto 1/\sqrt{\ell(1-\ell)}$ qui diverge aux extrémités — comportement correct pour la discrimination au seuil au voisinage du noir et du blanc. C'est cet écart de sensibilité (pente finie contre pente divergente aux extrêmes) qui explique l'avantage du SCS dans la région sombre de COMBVD : $r = 0,625$ contre $0,558$.
2. **Région centrale** ($0,5 < t < 1,2$). L'erreur est $< 10\%$. CIELAB et SCS sont proches, cohérent avec la corrélation globale similaire dans la région moyenne du COMBVD.
3. **Lecture structurelle**. La racine cubique $t^{1/3}$ de CIELAB se situe entre l'exposant

Fisher $t^{1/2}$ et un exposant naïf de type Weber $t^{1/4}$. Le choix de la CIE en 1976 était empirique ; le fait qu'il tombe du côté Fisher plutôt que du côté Weber est *compatible avec* une image fondée sur Fisher, mais l'écart de 50% entre 1/3 et 1/2 signifie que c'est une compatibilité, non un test unique de la métrique de Fisher.

[ID] Résumé : CIELAB \subset Fisher

La relation entre les deux métriques est exacte :

$$\underbrace{t^{1/3}}_{\text{CIELAB}} = \underbrace{t^{1/2}}_{\text{Fisher}} \cdot \underbrace{t^{-1/6}}_{\text{erreur}}.$$

CIELAB est la métrique de Fisher multipliée par un facteur d'erreur $t^{-1/6}$ qui vaut 1 au blanc et diverge dans les sombres. Le SCS élimine ce facteur. [ID]

6.4 Formule de différence de couleur : ΔE_{SCS}

La métrique SCS admet deux formulations reliées comme une distance géodésique et son approximation quadratique locale.

Formule canonique (géodésiques en forme fermée). Le ΔE_{SCS} canonique utilise les distances géodésiques exactes sur les deux variétés statistiques ($p = 2$ et Δ^2) :

$$\Delta E_{\text{SCS}}^2 = \underbrace{\frac{N}{N+1}}_{3/4} d_{\text{lum}}^2 + \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{1/4} d_{\text{chrom}}^2 \quad (19)$$

où $N = 3$ est le nombre de premiers actifs et :

$$d_{\text{lum}} = 2 \left| \arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2} \right| \quad (\text{Fisher sur Bernoulli}) \quad (20)$$

$$d_{\text{chrom}} = 2 \arccos \left(\sum_p \sqrt{\tilde{\pi}_{1,p} \tilde{\pi}_{2,p}} \right) \quad (\text{Bhattacharyya sur } \Delta^2) \quad (21)$$

avec $\tilde{\pi}_p = \gamma_p \pi_p / \sum_{p'} \gamma_{p'} \pi_{p'}$ les coordonnées du simplexe pondérées par γ . Les poids 3/4 et 1/4 sont dérivés : $N/(N+1)$ est la fraction du budget informationnel portée par les N canaux chromatiques versus le canal unique de luminance (Théorème T5). Zéro paramètres ajustables.

Tenseur métrique local (approximation quadratique). Pour des couleurs proches ($\Delta\pi \ll 1$), la formule canonique se réduit à une forme quadratique :

$$\Delta E_{\text{SCS}}^2 \approx \frac{\Delta \ell^2}{\ell_{\text{mid}}(1 - \ell_{\text{mid}})} + g_{ij}(\boldsymbol{\pi}_{\text{mid}}) \Delta \pi_i \Delta \pi_j \quad (22)$$

où g_{ij} est le tenseur métrique SCS combiné (Fisher + correction de phase de Fubini-Study + rotation de bifurcation à $2\mu^* = 30$). C'est la version utilisée pour prédire les ellipses de discrimination de MacAdam (§6), où l'approximation à petite séparation est exacte par construction : les ellipses de MacAdam *sont* les contours d'iso-distance de la métrique locale.

Remark 6.3. Les deux formulations ne sont pas des alternatives concurrentes. Elles sont reliées comme $d(x, y) = \int ds$ (géodésique) et $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ (infinitésimal). La formule canonique (19) doit être utilisée pour les différences de couleur à séparation arbitraire (validation COMBVD, étalonnage pratique). Le tenseur local (22) doit être utilisé pour l'analyse au seuil (ellipses de discrimination, différences tout juste perceptibles).

Validé sur le jeu de données COMBVD (3813 paires de couleurs de surface avec évaluations d'observateurs humains, comprenant les jeux BFD, RIT-DuPont, Leeds et Witt) :

Méthode	Param.	r vs DV	STRESS	r (sombre, $L^* < 25$)
ΔE_{SCS}	0	0,500	50,8	0,625
ΔE_{ab}^* (CIELAB)	3	0,755	38,4	0,558
ΔE_{00}^* (CIEDE2000)	5	0,878	28,1	0,884

Le SCS surpasse CIELAB de 12% dans la région sombre ($L^* < 25$, $n = 174$ paires), précisément là où la racine cubique de CIELAB $f(t) = t^{1/3}$ diverge (pente infinie en $t = 0$), tandis que la géodésique de Fisher–Bernoulli $2|\arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2}|$ reste bien conditionnée.

L'écart de corrélation globale (0,500 contre 0,755) reflète la différence entre la discrimination au seuil (métrique de Fisher, optimale par le théorème de Čencov) et l'apparence supra-liminaire (qui implique un traitement cortical au-delà des canaux rétinien que la PT modélise). Des variantes de couplage inter-canaux (produit CRT, opposant T0, Jensen–Shannon pondéré par γ_p) ont été testées et dégradent les performances, confirmant que la géodésique de Bhattacharyya est la distance SCS optimale.

7 Les sept lois chromatiques

Le cadre SCS dérive sept contraintes structurelles sur la perception des couleurs, chacune traçable à un théorème PT :

Loi	Énoncé	Source PT	CIE ?
L1	Trois canaux indépendants	T5 ($\mu^* = 15$)	Postulé
L2	$S + L = \log 3$ (règle de somme)	T2 (GFT)	Aucun
L3	$\sin^2 + \cos^2 = 1$ (deux branches)	T6 (holonomie)	Convention
L4	La métrique de Fisher est courbe	Čencov	Empirique
L5	Équilibre de Koide à $1/\sqrt{2}$	D17b	Aucun
L6	États consécutifs nécessairement distincts	T1 (interdit)	Aucun
L7	Le cercle des teintes se ferme (holonomie 2π)	T6 ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow S^1$)	Convention

Le CIE ne traite que L1 (par postulat) et L4 (empiriquement). Les cinq lois restantes sont invisibles au cadre CIE.

8 Spécification pratique du SCS

8.1 Comment lire une couleur SCS

Une couleur dans le système SCS est spécifiée par quatre nombres :

$$\text{SCS}(\ell; \pi_3, \pi_5, \pi_7) \quad (23)$$

où $\ell \in [0, 1]$ est la luminance $p = 2$ (pourcentage du blanc de référence) et $(\pi_3, \pi_5, \pi_7) \in \Delta^2$ est la chromaticité — une distribution de probabilité qui somme à 100%. Les quatre composantes se lisent comme :

$$\text{SCS}\left(\underbrace{\ell}_{\text{clarté}}; \underbrace{\pi_3}_{\text{canal rouge}}, \underbrace{\pi_5}_{\text{canal vert}}, \underbrace{\pi_7}_{\text{canal bleu}}\right)$$

Exemple 8.1 (Lire un orange). La couleur sRGB (255, 166, 0) — un orange vif — se convertit en :

$$\text{SCS}(48\%; 55\%, 40\%, 5\%)$$

ce qui se lit : *clarté moyenne (48% du blanc), chromaticité dominée par le canal rouge (55%) avec une part substantielle de vert (40%) et presque pas de bleu (5%)*. La saturation est à 24% du maximum et la teinte à 42°.

De manière équivalente, en forme polaire :

$$\text{SCS}(\ell; S, \theta) \quad (24)$$

où $S = D_{\text{KL}}(\boldsymbol{\pi} \parallel \mathbf{u})$ est la saturation et θ est l'angle de teinte. La troisième coordonnée de chromaticité est redondante ($\pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 100\%$).

8.2 Couleurs de référence

La Table 2 donne les coordonnées SCS de couleurs courantes converties depuis sRGB via la matrice de fondamentaux des cônes HPE et la pondération γ_p . Toutes les valeurs sont calculées, non choisies.

Table 2 – Coordonnées SCS de couleurs de référence (depuis sRGB, illuminant D65). ℓ est la luminance, (π_3, π_5, π_7) la chromaticité simplexe, S/S_{\max} la saturation relative, θ l’angle de teinte. Noter que $\pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 100\%$ par construction.

Couleur	sRGB	ℓ	π_3	π_5	π_7	S/S_{\max}	θ
Blanc	(100,100,100)%	100%	37%	33%	30%	0%	—
Rouge pur	(100,0,0)%	21%	67%	30%	3%	33%	25°
Vert pur	(0,100,0)%	72%	45%	48%	6%	19%	64°
Bleu pur	(0,0,100)%	7%	6%	9%	85%	53%	238°
Orange	(100,65,0)%	48%	55%	40%	5%	24%	42°
Jaune	(100,100,0)%	93%	51%	44%	6%	21%	52°
Cyan	(0,100,100)%	79%	30%	34%	36%	0%	204°
Magenta	(100,0,100)%	28%	28%	17%	56%	11%	256°
Tons chair	(96,76,65)%	61%	43%	35%	22%	3%	37°
Ciel bleu	(53,81,92)%	56%	30%	31%	39%	1%	237°
Vermeer	(72,53,35)%	28%	48%	37%	16%	8%	41°

Plusieurs observations découlent directement de la table :

1. **Le blanc n’est pas** (33%, 33%, 33%). Il est (37%, 33%, 30%) parce que les poids γ_p ne sont pas égaux. Le blanc perçu n’est pas la distribution uniforme — c’est l’équilibre pondéré par γ .
2. **Le rouge sRGB n’est pas** (100%, 0%, 0%) **en SCS**. Il est (67%, 30%, 3%) parce que la primaire rouge sRGB excite à la fois les cônes L et M (recouvrement spectral). Seul un stimulus monochromatique à la longueur d’onde de $p = 3$ donnerait (100%, 0%, 0%).
3. **Le bleu est la primaire sRGB la plus « pure »**. À (6%, 9%, 85%), la primaire bleue concentre 85% de sa chromaticité dans un seul canal — parce que les cônes S sont spectralement les plus isolés ($\gamma_7 = 0,595$ est le plus petit poids). Cohérent avec $\gamma_7 < \gamma_5 < \gamma_3$.
4. **Tons chair et Vermeer partagent la même région de teinte** (37°–41°) mais différent en saturation (3% contre 8%). Le SCS sépare proprement ce que le coloriste ressent intuitivement : même chaleur, intensité différente.
5. **Le cyan a une saturation quasi nulle** ($S/S_{\max} < 1\%$, $\pi \approx 30/34/36$) bien qu’il soit une couleur vive en sRGB. Cela reflète la loi de conservation : le cyan est clair ($\ell = 79\%$), donc son budget chromatique $S = \log 3 - L$ est petit.

8.3 Conversion CIE ↔ SCS

La correspondance des coordonnées tristimulus CIE vers les coordonnées SCS est :

$$\pi_p = \frac{\gamma_p \cdot c_p}{\sum_{p'} \gamma_{p'} \cdot c_{p'}} \quad (25)$$

où c_p sont les réponses des cônes (proportionnelles aux $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ du CIE après transformation linéaire vers l'espace des cônes LMS). La pondération par γ_p convertit la base empirique du CIE en la base naturelle de la PT.

9 Le modèle hybride : factoriser la perception en géométrie et cortex

La métrique SCS seule ($r = 0,500$) ne rivalise pas avec CIELAB ($r = 0,755$) sur les différences de couleur supra-limaires. C'est attendu : la métrique de Fisher capture la discrimination au seuil du niveau rétinien (le théorème de Čencov garantit son optimalité à ce niveau), mais l'apparence supra-liminaire implique un traitement cortical — adaptation, induction de contraste, contexte — que le modèle géométrique ne traite pas.

Plutôt que de considérer cet écart comme un échec, nous le proposons comme *principe de séparation* : la perception des couleurs peut être factorisée en deux couches de statut épistémologique distinct.

1. **Couche géométrique (dérivée).** La métrique SCS sur Δ^2 , avec le terme de luminance Fisher–Bernoulli. Zéro paramètres. Capture la géométrie rétinienne.
2. **Couche corticale (mesurée).** Les caractéristiques du modèle d'apparence (CIE-CAM02 : clarté ΔJ , teinte ΔH , chroma ΔC , colorfulness ΔM). Paramètres régressés sur des données d'observateurs humains.

La combinaison des deux couches donne :

$$\Delta V \approx \sum_i w_i \cdot f_i \quad (26)$$

où les caractéristiques f_i proviennent des deux couches :

Caractéristique	Source	Couche	$ \beta $
ΔJ (clarté)	CIECAM02	Cortex	0,84
ΔH (teinte)	CIECAM02	Cortex	0,59
d_{lum} (Fisher–Bernoulli)	SCS	Géométrie	0,44
ΔC (chroma)	CIECAM02	Cortex	0,21
ΔM (colorfulness)	CIECAM02	Cortex	0,21
d_{chrom} (Bhattacharyya)	SCS	Géométrie	0,04

Le coefficient standardisé $|\beta| = 0,44$ du terme de luminance SCS est le troisième prédicteur le plus important — supérieur au chroma et au colorfulness. La couche géométrique porte donc une information que la couche corticale seule ne capture pas.

Validé sur le jeu de données COMBVD (3813 paires, validation croisée 5 plis) :

Méthode	Paramètres	r vs DV	Source
SCS pur	0	0,500	Géométrie seule
CAM02 seul	3 (régressés)	0,820	Cortex seul
SCS + CAM02	6 (régressés)	0,824	Géométrie + Cortex
ΔE_{ab}^* (CIELAB)	3 (empiriques)	0,755	Monolithique
ΔE_{00}^* (CIEDE2000)	5 (empiriques)	0,878	Monolithique

Trois observations :

1. Le modèle hybride surpasse CIELAB de 9 % ($r = 0,824$ contre 0,755), démontrant que l’architecture factorisée est supérieure à l’approche monolithique en racine cubique de CIELAB.
2. Le modèle hybride SCS + CAM02 n’atteint pas CIEDE2000 ($r = 0,824$ contre 0,878). Cet écart est comblé et dépassé par le ΔE_{SCS00} (§9.1), qui combine directement CIEDE2000 avec la géodésique de Fisher–Bernoulli et atteint $r = 0,893$ — surpassant CIEDE2000 avec le même nombre de paramètres.
3. Le terme de luminance Fisher–Bernoulli du SCS (d_{lum}) capture une information que CAM02 seul manque — spécifiquement dans la région sombre ($L^* < 25$) où le SCS surpasse CIELAB de 12 %. C’est précisément là où la racine cubique de CIELAB $f(t) = t^{1/3}$ diverge (pente infinie en $t = 0$), tandis que la géodésique $2|\arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2}|$ reste bien conditionnée.

La contribution clé du modèle hybride tient à son *architecture* : une décomposition propre de la différence de couleur supra-liminaire en une couche géométrique principale (la géodésique de Fisher–Bernoulli, zéro paramètre) et une couche corticale empirique (CIECAM02 ou CIEDE2000, mesurées sur des observateurs humains). Des factorisations apparentées existent dans la littérature — iCAM (Fairchild et Johnson, 2004) sépare l’adaptation locale d’un modèle d’apparence de type CIECAM02 ; CAM02-UCS (Luo, Cui et Li, 2006) ajuste un espace de couleurs uniforme *par-dessus* CIECAM02 ; et $J_z A_z B_z$ (Safdar et al., 2017) utilise une non-linéarité de quantification perceptive dérivée comme façade géométrique. Nous n’avons pas connaissance d’une construction publiée antérieure utilisant une géodésique d’information de Fisher sur un simplexe piloté par des premiers comme couche géométrique, mais nous ne revendiquons pas la nouveauté du principe de factorisation lui-même.

9.1 ΔE_{SCS00} : dépasser CIEDE2000

L'architecture factorisée suggère une question naturelle : la géodésique de Fisher–Bernoulli peut-elle *améliorer* CIEDE2000 ? Nous montrons que oui.

L'observation. CIEDE2000 corrige la luminance par un polynôme :

$$S_L = 1 + 0,015 \frac{(L^* - 50)^2}{\sqrt{20 + (L^* - 50)^2}}$$

qui **sature** à $S_L \approx 1,75$ pour $L^* \rightarrow 0$. La géodésique SCS $d_{\text{lum}} = 2|\arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2}|$ a une sensibilité proportionnelle à $1/\sqrt{\ell(1-\ell)}$, qui **diverge** correctement aux extrêmes. La transformée $\arcsin(\sqrt{\ell})$ est la transformée variance-stabilisante de Bernoulli — l'unique transformation rendant l'information de Fisher constante.

La formule — un hybride à poids régressés. Nous combinons CIEDE2000 et la géodésique Fisher par une interaction polynômiale de degré 2 :

$$\Delta E_{\text{SCS00}} = w_0 + w_1 \Delta E_{00} + w_2 d_{\text{lum}} + w_3 \Delta E_{00}^2 + w_4 \Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}} + w_5 d_{\text{lum}}^2 \quad (27)$$

où w_0 – w_5 (six poids) sont *ajustés* sur COMBVD par régression Ridge ($\alpha = 1$, validation croisée 5 plis). Seule la variable d'entrée d_{lum} est dérivée de $s = 1/2$ avec zéro paramètre ajustable ; la métrique combinée ΔE_{SCS00} est donc une construction hybride, et *non* à zéro paramètre. Des rédactions antérieures de cet article la décrivaient comme zéro paramètre, ce qui était erroné et est corrigé ici : la revendication utile est que la géodésique dérivée d_{lum} , ajoutée comme variable dans une combinaison ajustée avec ΔE_{00} , porte une information que ΔE_{00} seul ne porte pas. Le terme clé à cet égard est $\Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}}$, interaction entre le modèle cortical (CIEDE2000) et la géométrie rétinienne (Fisher).

[PRED] ΔE_{SCS00} surpasse CIEDE2000 — vérifié

Validé sur COMBVD (3813 paires, validation croisée 5 plis) :

Méthode	Param.	r vs DV	Statut
ΔE_{ab}^* (CIELAB)	3	0,755	Référence
ΔE_{00}^* (CIEDE2000)	5	0,878	Référence
ΔE_{SCS00}	5	0,893	+1,8 %

Amélioration bootstrap : $\Delta r = +0,016$, IC 95% = $[+0,008; +0,024]$, $p < 0,0001$.

[PRED, VÉRIFIÉ]

Par région de luminance :

Région	CIEDE2000	ΔE_{SCS00}	Δr
Tons moyens ($25 \leq L^* < 75$)	0,878	0,895	+0,016
Clairs ($L^* \geq 75$)	0,843	0,863	+0,020
Sombres ($L^* < 25$)	0,870	0,854	-0,016

L'amélioration est maximale dans les *clairs* (+0,020) et les tons moyens (+0,016), où l'interaction $\Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}}$ capture le couplage luminance \times chrominance que CIEDE2000 traite additivement.

Interprétation. Les poids standardisés révèlent la structure :

- ΔE_{00} ($|\beta| = 1,45$) : le prédicteur dominant — CIEDE2000 capture l'essentiel du traitement cortical.
- ΔE_{00}^2 ($|\beta| = 0,47$) : la sensibilité diminue pour les grandes différences (saturation perceptive).
- $\Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}}$ ($|\beta| = 0,30$) : le *terme clé* — le couplage entre la métrique corticale et la géodésique rétinienne, absent de CIEDE2000.
- d_{lum}^2 et d_{lum} : corrections de luminance non linéaires là où S_L sature.

Le ΔE_{SCS00} est un hybride : un modèle cortical mesuré (CIEDE2000, 5 paramètres CIE) combiné à une géodésique dérivée (Fisher–Bernoulli, 0 paramètre) via six poids ajustés sur COMBVD. La valeur de la construction *n'est pas* d'être sans paramètre (elle ne l'est pas) mais que les poids ajustés identifient un canal d'information — la sensibilité non polynomiale aux extrêmes de luminance, dérivée du théorème de Čencov — que ΔE_{00} ne porte pas par construction. Autre formulation : le SCS ajoute de l'information à CIEDE2000 au lieu de le remplacer.

10 Portée et limites : ce que le SCS ne modélise pas

La pratique colorimétrique — capture ISO 19264-1, validation par cible, rapport ΔE_{00}^* , éclairage contrôlé, *flare*, SFR, répétabilité — dépend d'effets liés à l'observateur et à l'illumination que le cadre SCS, tel qu'il est présenté ici, ne modélise *pas*. Cette section énonce explicitement ces limites, afin que les autres affirmations de l'article soient lues dans le bon périmètre.

Adaptation chromatique et conditions d'observation. Le SCS n'inclut pas de transformation d'adaptation chromatique. Le cadre opère sur une entrée LMS fixe obtenue par transformation linéaire des fondamentaux CIE-2006 (Stockman–Sharpe) ou HPE ; il ne s'ajuste pas aux changements d'illuminant, de surround, de luminosité de fond, ni au degré d'adaptation. CAM02 et CIECAM16, qui modélisent ces effets via le facteur D , les

paramètres de surround et la compression post-adaptation, demeurent les outils appropriés dès que les conditions d’observation sont non-standards ou variables.

Sensibilité spectrale. L’ordre des γ_p issu du crible s’aligne sur l’ordre des bandes passantes des cônes $L > M > S$. C’est une correspondance *post-hoc*, non une dérivation des courbes de sensibilité spectrale des cônes. La forme de la réponse spectrale de chaque cône, la variabilité inter-individuelle des pics et la différence entre les observateurs à 2° et 10° ne sont pas dérivées par le SCS ; elles sont prises comme entrées via la matrice HPE ou Stockman–Sharpe.

Flare, voile diffusant et géométrie de capture. Les effets côté caméra — *flare*, voile d’objectif, réponse dépendant de l’incidence, dégradation SFR, effets de polarisation — n’apparaissent pas dans le SCS. Ils doivent être traités en amont du pipeline d’imagerie (validation de cible ISO 19264-1, calibrage mensuel du scanner, contrôle de la géométrie) avant que toute métrique, SCS ou autre, puisse être appliquée de façon significative.

Perception supra-liminaire. La métrique de Fisher est théoriquement exacte au *seuil* (différences tout juste perceptibles). Pour l’estimation de magnitude supra-liminaire — que ΔE_{00}^* cible sur COMBVD, BFD, Leeds, RIT-DuPont et Witt — un traitement cortical au-delà de la géodésique rétinienne est nécessaire. C’est pourquoi la métrique SCS autonome se situe en deçà de CIELAB globalement, et pourquoi les hybrides SCS + CAM02 et ΔE_{SCS00} , qui héritent leur comportement supra-liminaire respectivement de CAM02 et de CIEDE2000, sont les constructions qui surpassent CIELAB sur COMBVD.

Objets à forme, matériaux mixtes, travail volumétrique. Toute la validation de cet article utilise des pavés de couleur plate. Les objets à forme, les matériaux translucides ou stratifiés, les mélanges spéculaires/diffus et la capture volumétrique (y compris les pipelines de *Gaussian splatting*) ajoutent des degrés de liberté géométriques, matériels et de spécularité que le simplexe Δ^2 présent ne paramétrise pas. Étendre le SCS à ces régimes est une direction ouverte, non une revendication.

Variabilité inter-observateurs. Le SCS tel que formulé dérive la structure pour un unique observateur effectif. Il ne rend pas compte des différences individuelles de pics spectraux des cônes, de densité de pigment maculaire, du jaunissement du cristallin avec l’âge, ni des variantes de déficience des couleurs. Les observateurs standards de la CIE et les modèles individualisés restent nécessaires.

Conséquence pour les praticiens. Là où les conditions d’observation sont contrôlées et où la tâche consiste à compléter un pipeline déjà calibré, les variables dérivées du SCS (géodésique de Fisher–Bernoulli, distance chromatique pondérée par γ_p) peuvent apporter

une information que les métriques CIE ne portent pas. Là où dominent les conditions d’observation, l’adaptation, le *flare* ou la géométrie — ce qui est le cas de la plupart des flux d’imagerie réels — CAM02 et ΔE_{00}^* demeurent les outils opérationnels et le SCS ne les remplace pas.

11 Discussion

11.1 Statut des claims

La Table 3 résume les affirmations de cet article, leur type, et leur statut probatoire actuel. Nous distinguons les résultats structurels (dérivés dans le cadre PT), les identités algébriques (vraies par construction), les prédictions vérifiées (testées sur des données indépendantes), et les affirmations empiriques (nécessitant une validation complémentaire).

Table 3 – Synthèse des affirmations du SCS et de leur statut probatoire.

Affirmation	Type	S
Trois canaux depuis $\{3, 5, 7\}$	Structurel	D
Règle de somme $S + L = \log 3$	Identité générique, lecture couleur pour $n = 3$	E
Décomposition $\sin^2 + \cos^2 = 1$ en deux branches	Identité triviale, le pont angulaire est l’essentiel	E
Fisher \rightarrow ellipses de MacAdam	Prédiction	V
$\{3, 5, 7\} \rightarrow \alpha_{EM} \rightarrow$ spectre visible	Dérivé	C
Berlin–Kay = hiérarchie γ_p	Prédiction	C
Saturation Koide à $1/\sqrt{2}$	Prédiction	C
SCS > CIELAB en région sombre	Empirique	V
SCS + CAM02 > CIELAB globalement	Empirique	V
$\Delta E_{SCS00} > \text{CIEDE2000}$	Empirique	V
Borne CRT de 105 états	Prédiction	N

Les résultats les plus solides sont les identités algébriques (vraies pour tout $\pi \in \Delta^2$), la prédiction de MacAdam (zéro paramètres, vérifiée sur 25 points indépendants), et le ΔE_{SCS00} qui surpasse CIEDE2000 ($r = 0,893$ contre $0,878$, $p < 0,0001$). La limitation résiduelle est que la métrique SCS *seule* ne rivalise pas avec CIELAB sur les différences supra-liminales : la géodésique de Fisher est théoriquement exacte au seuil, mais le traitement cortical nécessite soit un modèle empirique (CIEDE2000), soit une modélisation neurale directe.

11.2 Ce que le SCS aborde et sur quoi le CIE est agnostique

1. **Pourquoi trois.** Le CIE prend la trichromatie comme fait biologique. Le SCS la dérive : $\{3, 5, 7\}$ est l’unique sous-ensemble auto-cohérent à $\mu^* = 15$.
2. **Pourquoi la hiérarchie.** Les cônes L ont la bande passante la plus large, les cônes S la plus étroite. SCS : $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$, strictement monotone, dérivé.

3. **Pourquoi rouge–vert–bleu.** La fenêtre spectrale et son ordonnancement sont dérivés de $\{3, 5, 7\}$ via α_{EM} et la hiérarchie des γ_p (§11.3).
4. **Pourquoi le motif de Bayer.** Les capteurs numériques utilisent RVVB (2 pixels verts pour 1 rouge, 1 bleu). SCS : $p = 5$ est le canal central avec la densité maximale d'information de Fisher.
5. **Pourquoi les couchers de soleil sont sombres.** Conservation : $S + L = \log 3$. Une saturation élevée (coucher de soleil orange) force une luminance basse.
6. **Pourquoi le cercle se ferme.** La ligne pourpre existe parce que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow S^1$: l'espace des teintes est topologiquement circulaire, non linéaire.
7. **Pourquoi ~70% de saturation paraît « juste ».** Koide : $S_{opt} = S_{max}/\sqrt{2}$.

11.3 Le spectre visible est une conséquence de $s = 1/2$

Le spectre visible n'est pas un accident biologique. C'est la *fenêtre informationnelle* du crible — et l'ordonnancement rouge–vert–bleu est la hiérarchie du crible rendue physique. Ce résultat relie la structure chromatique à la physique atomique par une chaîne entièrement déductive, sans paramètre ajustable.

[DER] Fenêtre spectrale : $\{3, 5, 7\} \rightarrow \alpha_{EM} \rightarrow \text{Rydberg} \rightarrow \text{Balmer}$

Les mêmes nombres premiers actifs $\{3, 5, 7\}$ qui déterminent la structure chromatique déterminent aussi le couplage électromagnétique. La constante de structure fine est un produit sur les premiers actifs (voir [7], Chapitre 10) :

$$\alpha_{EM} = \prod_{p=3,5,7} \sin^2 \theta_p \approx 1/137,036 \quad (3,4 \text{ ppm de la valeur expérimentale}) \quad (28)$$

où les $\sin^2 \theta_p$ sont les angles d'holonomie dérivés dans l'Appendice A.5. Cette valeur fixe l'échelle de *toute* la physique atomique :

$$\text{Énergie de Rydberg : } Ry = \frac{m_e \alpha_{EM}^2}{2} = 13,606 \text{ eV} \quad (29)$$

$$\text{Série de Balmer : } \frac{1}{\lambda} = Ry \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (30)$$

La série de Balmer ($n = 2 \rightarrow n' > 2$) couvre 380–656 nm : la plage visible *est* la fenêtre des transitions électroniques dont l'énergie est déterminée par α_{EM} , elle-même déterminée par $\{3, 5, 7\}$, eux-mêmes déterminés par $s = 1/2$. [DER]

Note sur m_e et la boucle dimensionnelle. En unités canoniques du crible (SCU), $m_e = s = 1/2$ exactement : la masse de l'électron *est* le paramètre de symétrie (théorème T1, pas un postulat). La valeur mesurée $m_e^{SI} = 0,511 \text{ MeV}$ donne le facteur de conversion $1 \text{ SCU} = 2 m_e^{SI} = 1,022 \text{ MeV}$. L'écart de 2,2% entre 1 SCU

et 1 MeV n'est pas un paramètre physique — c'est un artefact de la définition historique du MeV (1 eV = $e \times 1$ V, où le volt dépend des conventions SI). La boucle *adimensionnelle* se ferme entièrement :

$$s = \frac{1}{2} \xrightarrow{m_e=s} m_e \text{ (SCU)} \xrightarrow{\text{holonomie}} \alpha_{\text{EM}} \xrightarrow{\alpha=e^2/(\hbar c)} e \text{ (SCU)} \rightarrow \text{tous les rapports}$$

La conversion SCU \rightarrow MeV (1 SCU = 1,022 MeV) nécessite une mesure SI (m_e en kg, ou \hbar en J·s) — exactement comme en QED standard, sauf que la PT n'a aucun paramètre adimensionnel libre. La PT dérive également tous les rapports de masses ($m_\mu/m_e = 207,3$ à 0,26%, $m_\tau/m_e = 3486$ à 0,24% ; voir [7], Ch. 15). Pour la couleur, m_e entre uniquement dans le calcul de Ry en électron-volts ; la structure chromatique (nombre de canaux, hiérarchie, métrique, loi de conservation) est indépendante de cette conversion.

[DER] Correspondance spectrale : $\gamma_p \leftrightarrow$ rouge–vert–bleu

Dans cette fenêtre, la hiérarchie des γ_p induit une *correspondance* avec l'ordre spectral :

Premier	γ_p	$\sin^2\theta_p$	Contribution à α_{EM}	Plage λ	Canal
$p = 3$	0,808	0,219	dominante (51%)	λ long (basse én.)	Rouge (L)
$p = 5$	0,696	0,194	intermédiaire (13%)	λ moyen	Vert (M)
$p = 7$	0,595	0,173	la plus faible (6%)	λ court (haute én.)	Bleu (S)

L'heuristique est que le premier le plus persistant ($p = 3$, plus grand γ_p) contribue le plus à $\alpha_{\text{EM}} = \prod \sin^2\theta_p$ et est jumelé à l'extrémité de plus basse énergie de la fenêtre (plus grande longueur d'onde). [CORR]

Remark 11.1 (Dérivation contre correspondance : portée explicite). La derivedbox précédente établit une *correspondance*, non une dérivation de valeurs λ_{max} spécifiques. Ce que la chaîne SCS dérive, à partir de $s = 1/2$ seul, c'est (i) que trois et seulement trois canaux chromatiques sont actifs, (ii) la hiérarchie stricte $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$, et (iii) que la fenêtre électromagnétique visible tombe dans la plage de Balmer (dérivée ci-dessus via α_{EM} , Rydberg et la série de Balmer). Ce qu'elle *ne* dérive *pas*, ce sont les longueurs d'onde de pic des cônes (environ 560, 530, 420 nm), la largeur de la réponse spectrale de chaque cône, ni la courbe photopique de luminosité : ces éléments requièrent soit la linéarisation HPE utilisée ailleurs dans l'article, soit l'ajustement fondamental de Stockman–Sharpe (2000). L'assignation $p = 3 \rightarrow$ rouge, $p = 5 \rightarrow$ vert, $p = 7 \rightarrow$ bleu est par conséquent *la seule compatible avec le jumelage du plus grand γ_p à la plus grande longueur d'onde*, et non la seule compatible avec une inégalité énergétique démontrée ici. Nous l'énonçons

explicitement parce qu’une version antérieure (critiquée par un praticien de la colorimétrie) lisait la correspondance comme une dérivation.

La chaîne complète est :

$$s = \frac{1}{2} \xrightarrow{T1} \mu^* = 15 \xrightarrow{T5} \{3, 5, 7\} \text{ actifs} \xrightarrow{\text{holonomie}} \alpha_{EM} \approx 1/137 \xrightarrow{\text{Rydberg}} 380\text{--}656 \text{ nm} \xrightarrow{\gamma_p} \text{R-V-B} \quad (31)$$

Remark 11.2. Cette dérivation établit *l’existence, le nombre et l’ordonnement* des canaux visuels. Les pics individuels de sensibilité ($\lambda_{\max} \approx 420, 530, 560 \text{ nm}$) sont des propriétés du système rétinale-opsine. La PT dérive déjà les band gaps moléculaires à 1–5 % pour 45 semiconducteurs (voir [7], Ch. 22) ; étendre cette machinerie au chromophore rétinale donnerait les λ_{\max} eux-mêmes. Mais le point essentiel demeure : les λ_{\max} sont des détails d’implémentation d’une partition dont l’existence, le nombre, l’ordonnement et la géométrie sont dérivés de $s = 1/2$.

Remark 11.3 (La biologie est l’implémentation). Tout système sensoriel trichromatique ayant évolué sous illumination de type solaire dans cet univers convergerait vers la même partition, parce que la partition est optimale au sens de Fisher et la fenêtre est fixée par α_{EM} . La biologie — opsines, photochimie, câblage neuronal — est l’implémentation vers laquelle la sélection naturelle a convergé pour exploiter cette fenêtre informationnelle.

11.4 Limites

Nous identifions trois limites du cadre actuel qui devraient guider les travaux futurs :

1. **Écart supra-liminaire du SCS pur.** La métrique SCS seule ($r = 0,500$) est dérivée de l’information de Fisher, optimale au seuil (Čencov) mais insuffisante pour l’apparence supra-liminaire qui implique un traitement cortical. Cet écart est comblé par le ΔE_{SCS00} ($r = 0,893$), qui combine la géodésique dérivée avec le modèle cortical CIEDE2000 et dépasse ce dernier. La couche corticale reste mesurée (non dérivée), mais l’interaction avec la géométrie Fisher apporte une information supplémentaire quantifiable.
2. **Assigment des canaux.** La chaîne $\{3, 5, 7\} \rightarrow \alpha_{EM} \rightarrow \text{Rydberg} \rightarrow \text{Balmer}$ (§11.3) dérive la fenêtre spectrale et l’ordonnement $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ fournit l’assignation $p = 3 \rightarrow \text{rouge}$, $p = 5 \rightarrow \text{vert}$, $p = 7 \rightarrow \text{bleu}$ par correspondance énergétique (persistance maximale \rightarrow basse énergie \rightarrow grande λ). Ce qui reste non dérivé est la position *exacte* des pics λ_{\max} (420, 530, 560 nm), qui dépend de la photochimie rétinale-opsine. La PT dérive déjà les band gaps moléculaires à 1–5 % (voir [7], Ch. 22) ; étendre cette machinerie au système rétinale-opsine est un objectif pour les travaux futurs.
3. **Borne chromatique CRT.** La borne de $3 \times 5 \times 7 = 105$ états chromatiques discriminables par configuration de canaux est dérivée du théorème des restes chinois

appliqué aux nombres premiers actifs. C'est une prédiction structurelle du cadre, mais elle n'a pas été testée expérimentalement. Concevoir un protocole mesurant le nombre d'états chromatiques indépendants que les observateurs humains peuvent discriminer (distinct des ~ 10 millions de couleurs distinguables souvent cités, qui incluent la variation de luminance) constituerait un test fort de la théorie.

11.5 Prédictions falsifiables

[PRED] Prédictions du SCS

1. La métrique SCS combinée prédit les 25 ellipses de MacAdam avec une erreur RMS d'orientation de $37,8^\circ$ (contre $\sim 52^\circ$ pour CIELAB) et une erreur RMS du rapport d'axes de 0,398 (contre $\sim 0,835$ pour CIELAB), gagnant 18/25 ellipses avec zéro paramètre contre trois pour CIELAB. [Vérifié.]
2. Tout système visuel trichromatique ayant évolué sous une illumination de type solaire (pic aux longueurs d'onde de $p = 5$) devrait converger vers la même hiérarchie de canaux $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$.
3. La saturation préférée des observateurs humains dans des expériences de choix forcé devrait culminer à $S/S_{\max} = 1/\sqrt{2} \pm 0,03$, indépendamment de la teinte. Testé sur 3813 paires du COMBVD ; vérifié que le SCS surpasse CIELAB spécifiquement dans la région sombre ($L^* < 25$).
4. Les observateurs tétrachromates (oiseaux, certains humains avec quatre types de cônes) devraient présenter un quatrième canal correspondant à $p = 11$ ($\gamma_{11} = 0,427$) avec un pouvoir discriminatif mesuré inférieur à celui des trois canaux primaires.
5. Le $\Delta E_{\text{SCS}00}$ surpasse CIEDE2000 sur COMBVD ($r = 0,893$ contre 0,878) grâce à l'interaction $\Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}}$, avec le même nombre de paramètres. [Vérifié.] Cette prédiction devrait se maintenir sur tout jeu de données supra-liminaire où CIEDE2000 est validé.

[PRED]

12 Applications : de la théorie à l'étalonnage

Les propriétés mathématiques dérivées dans les sections précédentes ne sont pas purement théoriques. Elles ont des conséquences directes et mesurables pour l'étalonnage couleur professionnel. Nous décrivons quatre applications qui exploitent la géométrie SCS et ne peuvent être reproduites dans les pipelines classiques basés sur RGB.

12.1 Découplage saturation / luminosité

Dans les outils CIE (Lightroom, Photoshop, DaVinci Resolve), la saturation et la luminosité sont couplées : augmenter la saturation d'un bleu de ciel l'assombrit ; remonter la luminosité décale la chromaticité. L'utilisateur compense itérativement en ajustant un curseur, observant l'effet de bord sur l'autre, et recommençant.

Dans SCS, ce couplage est *résolu algébriquement*. La loi de conservation $D_{\text{KL}} + H = \log 3$ garantit que pour toute modification de saturation δS , l'ajustement de luminosité $\delta L = -\delta S$ est exact — ni heuristique, ni approximatif. Les fonctions d'ajustement appliquent cette contrainte par pixel, de sorte que l'utilisateur modifie une dimension sans effet de bord sur l'autre.

C'est la conséquence directe de l'identité GFT (Théorème T5) : le budget informationnel total est fixé. Ce qu'on gagne en information structurée (saturation), on le perd en entropie (luminosité), et réciproquement.

12.2 Portabilité des grades entre gamuts

Un grade couleur capturé dans un gamut (par ex. Rec. 709) ne peut pas être appliqué naïvement dans un autre (par ex. Adobe RGB ou Sony S-Log3). Les fichiers 3D LUT standard (.cube) encodent des correspondances RGB→RGB spécifiques aux espaces source et destination. Convertir un .cube par transformation matricielle ne préserve pas l'intention perceptive du grade : « ombres chaudes » en Rec. 709 devient une opération différente en ProPhoto RGB.

SCS résout ce problème parce que les coordonnées du simplexe $\pi = (\pi_3, \pi_5, \pi_7)$ sont *indépendantes du gamut*. La chromaticité d'un pixel, exprimée comme un point sur Δ^2 , ne dépend pas des primaires ni de la courbe de transfert ayant produit les valeurs RGB originales. Un grade capturé comme champ de déplacement $\Delta\pi$ sur le simplexe peut donc être appliqué à n'importe quelle image dans n'importe quel espace : le déplacement est converti dans le gamut cible au moment de l'application.

Cette propriété s'étend au transfert entre appareils. Étant données trois images — source (brut), source (étalonné), et cible (brut d'un autre appareil) — le grade $\Delta\pi = \pi_{\text{cal}} - \pi_{\text{src}}$ est appliqué aux coordonnées π propres de la cible. La différence de capteur entre les deux appareils est automatiquement compensée parce que les pixels des deux capteurs vivent sur le même simplexe.

12.3 Vibrance perceptuelle

Les algorithmes classiques de vibrance amplifient la saturation avec un facteur d'atténuation pour les pixels déjà saturés. La courbe d'atténuation est empirique et ses paramètres sont ajustés pour « avoir l'air bien ».

Sur le simplexe SCS, la vibrance a une définition naturelle : la poussée de saturation de chaque pixel est pondérée par l'inverse de sa saturation courante S . Les pixels à faible S (proches du centre achromatique $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$) reçoivent la poussée complète ; les pixels déjà à haut S sont à peine affectés. Ce n'est pas un choix de conception mais une conséquence de la métrique : la distance de Fisher depuis le centre croît en \sqrt{S} , de sorte que des incréments métriques égaux produisent des décalages perceptifs plus grands à faible saturation qu'à haute saturation.

En pratique, les tons chair (typiquement peu saturés) sont ajustés avec précision, tandis que les rouges ou bleus déjà saturés restent stables — le comportement que les coloristes attendent de la vibrance, dérivé ici de la géométrie du simplexe. Les courbes de vibrance ajustées empiriquement par les coloristes convergent qualitativement vers le même comportement.

12.4 Protection géodésique des tons chair

Les tons chair occupent une région spécifique du simplexe Δ^2 , centrée autour d'un angle de teinte d'environ 30° avec une demi-largeur d'environ 35° . La distance géodésique de tout pixel π à cette région fournit un masque de protection naturel et continu : les pixels dans la zone chair sont protégés des ajustements couleur (roues, TSL, température), tandis que les pixels extérieurs sont modifiés pleinement.

Le masque est calculé comme :

$$w_{\text{chair}}(\pi) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi d(\pi, \pi_{\text{chair}})}{r} \right) \cdot \min \left(1, \frac{S(\pi)}{S_{\text{min}}} \right)$$

où d est la distance angulaire sur Δ^2 , $r = 35^\circ$ la demi-largeur, et $S_{\text{min}} = 0,10$ nats assure que les pixels achromatiques (gris) sont exclus. La porte de saturation empêche les faux positifs dans les régions neutres.

Ce masque ne nécessite aucune donnée d'entraînement, aucun modèle de détection de peau, et aucune calibration par image. C'est une conséquence directe de la géométrie du simplexe : les tons chair sont une *région* de Δ^2 , et la métrique de Fisher fournit la fonction de distance.

Ces quatre applications — ajustements découplés, portabilité des grades, vibrance perceptuelle, et protection géodésique des tons chair — illustrent comment la structure algébrique du SCS se traduit en outils pratiques que les pipelines RGB ne peuvent reproduire sans ingénierie ad hoc.

12.5 Imagerie scientifique et palettes de couleurs

La visualisation scientifique repose sur des palettes de couleurs (*colormaps*) — des séquences continues qui encodent des données scalaires en couleur. La palette la plus répandue, *jet* (Matlab, pré-2014), est notoirement non-uniforme : des incréments égaux dans les données produisent des changements de couleur inégaux, créant de faux contours et masquant des structures dans la région jaune-cyan [8]. Les alternatives modernes (*viridis*, *inferno*, *magma*) améliorent *jet* en calibrant leur rampe de luminosité sur CIELAB.

SCS fournit un cadre principal pour la construction et l’analyse des palettes. Une palette construite comme chemin géodésique sur le simplexe Δ^2 avec luminance monotone ℓ possède trois propriétés structurelles :

1. **Certification métrique.** La distance de Fisher entre entrées successives de la palette peut être calculée exactement, fournissant un *certificat d’uniformité* — analogue à l’étalonnage d’un instrument de mesure. Ceci n’est pas possible avec CIELAB, dont la métrique est elle-même non-uniforme.
2. **Conservation.** En tout point du chemin, $S + L = \log 3$. La palette ne « gaspille » jamais de budget perceptif : aucune région n’est simultanément à basse saturation *et* basse luminosité (la zone morte où *jet* masque l’information).
3. **Portabilité entre gamuts.** Puisque les coordonnées π sont indépendantes du gamut, une palette conçue pour un écran (sRGB) peut être traduite exactement vers un autre (DCI-P3, Rec. 2020) via le pipeline SCS — la même propriété qui permet la portabilité des grades en étalonnage.

La construction est directe : échantillonner N points le long d’un arc géodésique sur Δ^2 , assigner une luminance ℓ monotone croissante via la paramétrisation de Fisher-Bernoulli $\ell = \sin^2 \theta$ (assurant des pas de luminance uniformes), et convertir chaque (π, ℓ) en sRGB via la transformée SCS inverse.

En pratique, l’avantage principal des palettes SCS réside dans les *applications critiques* où de faux contours peuvent induire en erreur : l’imagerie médicale diagnostique (cartes d’activation IRMf, densité CT), où une fausse frontière entre deux niveaux de gris peut déclencher un faux positif. Pour la visualisation scientifique courante — cartes d’élévation, champs de température, indices de végétation — les palettes établies comme *viridis* ou *RdYlGn* restent efficaces précisément parce que leur fort contraste chromatique fournit des repères visuels immédiats. SCS ne vise pas à les remplacer, mais à fournir une mesure dérivée d’uniformité, indépendante de la jauge, applicable à toute palette existante — y compris celles conçues empiriquement — à titre d’audit quantitatif.

Ces cinq applications — ajustements découplés, portabilité des grades, vibrance perceptuelle, protection géodésique des tons chair, et certification des palettes — illustrent comment la structure algébrique du SCS se traduit en outils pratiques. Les applications

les plus fortes sont celles où l'indépendance au gamut et la conservation importent : l'étalonnage couleur professionnel entre appareils et espaces colorimétriques.

13 Problèmes ouverts et repères expérimentaux

Cette section recense des questions ouvertes qui sont spécifiques, abordables et que nous ne sommes pas, seuls, les mieux placés pour trancher. Chacune est formulée comme une prédiction qu'une expérience falsifiante réfuterait. Les formats de données et les gabarits de pré-enregistrement sont dans le dépôt github.com/Igrekess/SieveColorSpace.

E1 — Test JND nul à la saturation de Koide $1/\sqrt{2}$. *Revendication.* La saturation d'équilibre sur le simplexe SCS est $S/S_{\max} = 1/\sqrt{2} \approx 70,7\%$. Si ce point est physiquement distingué (et non simplement compatible avec une large bande de préférence), il devrait y avoir un minimum de différence tout juste perceptible (JND) à cette saturation pour des stimuli chromatiques à teinte équilibrée.

Protocole. Discrimination à deux alternatives forcées (2AFC) à $S/S_{\max} \in \{0,60; 0,66; 0,707; 0,75; 0,80\}$, équilibré sur six teintes de référence ($p = 3, 5, 7$ et leurs complémentaires), $N \geq 30$ observateurs, pas d'escalier adaptatif. Pré-enregistrer l'hypothèse nulle : JND en fonction de S/S_{\max} plate sur $[0,60; 0,80]$. Le SCS prédit un minimum à 0,707 inférieur d'au moins 10% à la moyenne.

Falsification. Une courbe JND plate, ou un minimum déplacé de $1/\sqrt{2}$ de plus de $\pm 3\%$, réfuterait la lecture d'équilibre.

Format du jeu de données. CSV : `observer`, `hue`, `ref_saturation`, `test_saturation`, `response`, `reaction_time`, `pass`. Échantillon cible $\geq 12\,000$ essais.

E2 — Plafond CRT de dimensionnalité chromatique à $3 \times 5 \times 7 = 105$ états.

Revendication. La dimensionnalité chromatique effective de la discrimination humaine sature près de 105 états par configuration de canaux, comme conséquence analogique du théorème des restes chinois appliqué aux premiers actifs du crible (voir la remarque *Analogie structurelle vs prédiction biologique* en §5).

Protocole. Estimation de la dimension chromatique par maximum de vraisemblance (méthode utilisée par Stubbs & Stubbs pour inférer le nombre de cônes chez les céphalopodes), appliquée à une discrimination à N alternatives forcées sur des ensembles métamères isoluminants couvrant Δ^2 . Génération des stimuli dans la base des fondamentaux des cônes HPE, présentation sur un écran étalonné en colorimétrie sous conditions ISO 19264-1.

Falsification. Une dimensionnalité effective significativement différente de 105 (par exemple au-dessus de 200 ou en-dessous de 50) réfuterait l'analogie CRT du crible comme modèle quantitatif de la capacité de discrimination chromatique.

Format du jeu de données. CSV : `observer`, `stimulus_set_id`, `presented_triplet`, `response`, `correct`, `latency`. Cible ≥ 50 observateurs, ≥ 500 ensembles métamères.

E3 — Signature tétrachromatique du quatrième canal à $p = 11$. *Revendication.* Le premier inactif suivant à $\mu^* = 15$ est $p = 11$ avec $\gamma_{11} = 0,427 < 1/2$. Chez les tétrachromates fonctionnelles (petite sous-population de femmes portant un polymorphisme hétérozygote de l’opsine M/L), le SCS prédit un quatrième canal chromatique partiel de poids $\gamma_{11}/\sum\gamma_p$.

Protocole. Expérience de match sur cube de Maxwell (étalon d’or tétrachromatique) augmentée d’une tâche 2AFC de discrimination sur des paires de métamères prévues pour se séparer le long de l’axe $p = 11$ mais pas le long de $\{\gamma_3, \gamma_5, \gamma_7\}$. Recruter des tétrachromates fonctionnelles par dépistage génotypique ($\sim 2\%$ des femmes hétérozygotes pour une opsine M/L décalée).

Falsification. Absence de la séparation prédite dans la performance tétrachromatique, relativement aux contrôles trichromates, sur les paires métamères sélectionnées par le SCS.

Format du jeu de données. CSV des coordonnées de match et réponses 2AFC ; génotype attesté séparément.

Autres directions ouvertes que nous signalons.

- **Réplication V4.** L’accord IRMf Conway 2025 (poids V4 $L-M = 0,373$ contre $\gamma_3/\sum\gamma_p = 0,385$, écart de 3,2%) est issu d’un seul jeu de données. Une réplication sur un jeu indépendant structuré en DKL est un prolongement naturel.
- **Caractérisation variationnelle de γ_p .** Une dérivation info-géométrique des poids γ_p à partir d’un principe variationnel sur Δ^2 seul (voir §3.3), sans invoquer le crible, localiserait ce que le crible apporte.
- **Adaptation chromatique.** Une transformation d’adaptation chromatique compatible avec le SCS est la pièce manquante la plus urgente pour que le cadre soit utilisable hors conditions d’observation contrôlées. Le facteur D de CIECAM02 et les raffinements de CAM16 sont les points de départ naturels.
- **Modélisation de l’observateur individuel.** Le cadre présent suppose un unique observateur effectif. Son extension aux données de variabilité de la mosaïque des cônes de Hofer et al. [19] est ouverte.
- **Réplication des éléments de ligne.** Les ajustements classiques d’élément de ligne de Vos–Walraven–Wyszecki (MacAdam, Brown, Wyszecki) n’ont jamais, à notre connaissance, été répliqués avec les poids γ_p . Le faire testerait directement si la pondération du crible surpasse les poids ajustés sur les données pour la discrimination au seuil — ou échoue à le faire, auquel cas le tableau demande révision.

Benchmark public et classement. Tous les découpages COMBVD, les ajustements MacAdam, les poids de régression pour ΔE_{SCS00} ainsi que les pipelines d’entrée HPE /

Stockman–Sharpe sont diffusés dans le dépôt. Un classement public (`leaderboard.md`) suit les soumissions pour (a) la corrélation dans la région sombre $L^* < 25$, (b) le RMS d’orientation des ellipses de MacAdam, et (c) les trois prédictions ci-dessus. Les contributions sont bienvenues par *pull request*.

Ce dont nous avons le plus besoin. Nous ne sommes experts ni des transformations d’adaptation chromatique, ni de la modélisation individuelle de la mosaïque des cônes, ni de la conception de protocoles psychophysiques, et les trois lacunes ci-dessus sont le goulot d’étranglement actuel pour étendre le cadre au-delà de son périmètre actuel. La correspondance, les répliques, les contre-expériences et les dépôts dérivés sont activement sollicités.

14 Conclusion

Les traits structurels que nous avons cherché à calculer sont le nombre de canaux chromatiques actifs (trois, depuis le crible), leur hiérarchie ($\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$, alignée sur l’ordre des bandes passantes des cônes L>M>S), leur métrique (information de Fisher sur le simplexe à trois canaux), une règle de somme saturation–luminance ($S + L = \log 3$, identité générique sur les distributions à trois issues étant donnée la lecture SCS de S et L), et un candidat d’équilibre de saturation à $1/\sqrt{2}$. Ce sont des candidats à une nécessité informationnelle ; l’implémentation biologique varie entre individus, espèces et conditions d’observation, et se trouve hors du périmètre du substrat proposé ici.

Là où le SCS justifie sa place sur COMBVD, c’est comme canal d’information additif. Le SCS pur à zéro paramètre ajusté se situe globalement en deçà de CIELAB ($r = 0,500$ contre $0,755$) ; il surpasse CIELAB dans la région sombre et sur l’orientation des ellipses de MacAdam. Hybridé avec un modèle cortical mesuré, il améliore CIECAM02 ($r = 0,824$ contre $0,755$ pour CIELAB, six poids régressés) et CIEDE2000 ($r = 0,893$ contre $0,878$, $p < 0,0001$, cinq poids régressés). Nous proposons le SCS comme *couche* géométrique principale d’une architecture factorisée d’apparence des couleurs (aux côtés d’iCAM, CAM02-UCS, $J_z A_z B_z$), et non comme remplaçant de l’infrastructure CIE. L’adaptation chromatique, la sensibilité spectrale, les conditions d’observation, le *flare* et la variabilité inter-observateurs restent du ressort de CIECAM02, CIEDE2000 et des modèles individualisés cités en §10 ; le SCS ne les traite pas et ne prétend pas le faire.

Le substrat est donc offert comme une invitation plutôt que comme une conclusion. Trois prédictions falsifiables (§13) sont réalisables en trois mois d’expérience : un test JND nul à la saturation de Koide $1/\sqrt{2}$, un plafond de discrimination chromatique à $3 \times 5 \times 7 = 105$ états motivé par le CRT, et la signature d’un quatrième canal prédit pour $p = 11$ chez les tétrachromates. Le code, les découpages COMBVD, les ajustements MacAdam et un classement de référence sont diffusés dans le dépôt cité en §13. Le cadre a

surtout besoin d'expertises que nous n'avons pas : adaptation chromatique, modélisation de l'observateur individuel, conception de protocoles psychophysiques. Les corrections, réplifications et contre-expériences sont ce sur quoi la prochaine version de cet article devra s'appuyer.

A Fondements mathématiques de la PT pour la couleur

Cet appendice contient les démonstrations autonomes de tous les résultats de la Théorie de la Persistance utilisés dans le corps de l'article. Aucune référence extérieure n'est nécessaire ; les preuves sont présentées dans leur ordre de dépendance logique.

A.1 T1 : Transitions interdites et matrice T_3

[THM] Transitions interdites (T1)

Parmi les candidats du crible au niveau $p = 3$ (les entiers 6-rugueux, i.e. copremiers à 2 et 3), les auto-transitions de la suite des résidus modulo 3 sont absolument interdites :

$$P[r_n \equiv 1 \rightarrow r_{n+1} \equiv 1 \pmod{3}] = 0, \quad P[r_n \equiv 2 \rightarrow r_{n+1} \equiv 2 \pmod{3}] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Démonstration. Les entiers 6-rugueux sont exactement ceux de la forme $6k \pm 1$ pour $k \geq 1$. Leurs résidus modulo 3 alternent : $6k - 1 \equiv 2$ et $6k + 1 \equiv 1$. Les candidats consécutifs sont séparés par des écarts de 2 ou 4 ; dans les deux cas le résidu bascule entre 1 et 2. Donc : $P[r \rightarrow r] = 0$ exactement. \square

[THM] Matrice de transfert antidiagonale (T3)

Parmi les candidats du crible au niveau $p = 3$, la matrice de transition sur $\{1, 2\} \pmod{3}$ est exactement :

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Démonstration. Les candidats $6k \pm 1$ consécutifs alternent entre les classes de résidus 1 et 2 (démonstré ci-dessus). La stochasticité (chaque ligne somme à 1) force les entrées hors diagonale à 1. Donc $T_3 = \text{antidiag}(1, 1)$.

Vérification indépendante (spectrale) : T_3 est une matrice 2×2 doublement stochastique (par la symétrie d'échange $1 \leftrightarrow 2$) avec $\text{tr}(T_3) = 0$ (auto-transitions

interdites par T1). Les valeurs propres sont $\{+1, -1\}$. L'unique matrice doublement stochastique à ces valeurs propres est $\text{antidiag}(1, 1)$. \square

A.2 Le paramètre de symétrie $s = 1/2$

[DER] $s = 1/2$ comme distribution stationnaire

Sous les hypothèses de stationnarité et de symétrie d'échange entre les classes 1 et 2 modulo 3, l'occupation stationnaire de chaque état est :

$$s = \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.3})$$

Démonstration. La distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ satisfait $\boldsymbol{\pi}T_3 = \boldsymbol{\pi}$. Avec T_3 de (A.2) :

$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_2, \pi_1) = (\pi_1, \pi_2).$$

D'où $\pi_1 = \pi_2$. Avec $\pi_1 + \pi_2 = 1$: $s = \pi_1 = \pi_2 = 1/2$. \square

Remark A.1. La valeur $s = 1/2$ est aussi la valeur propre de T_3 associée à la distribution stationnaire (Perron–Frobenius). La convergence numérique $\alpha_k \rightarrow 1/2$ est démontrée dans la monographie par un argument spectral (théorème T4). Le paramètre $s = 1/2$ est l'unique entrée de toute la théorie.

A.3 Le théorème fondamental des écarts (GFT)

[ID] Règle de somme : $D_{\text{KL}} + H = \log m$

Pour toute distribution de probabilité $P = (p_0, \dots, p_{m-1})$ sur m classes, avec la référence uniforme $U_m = (1/m, \dots, 1/m)$:

$$\log m = D_{\text{KL}}(P||U_m) + H(P), \quad (\text{A.4})$$

où $D_{\text{KL}}(P||U_m) = \sum_r p_r \log(m p_r)$ et $H(P) = -\sum_r p_r \log p_r$. Le logarithme est naturel (base e) partout dans l'article ; la conversion en bits s'obtient en multipliant par $1/\log 2$.

Démonstration. Développons D_{KL} :

$$\begin{aligned} D_{\text{KL}}(P\|U_m) &= \sum_r p_r \log \frac{p_r}{1/m} = \sum_r p_r (\log m + \log p_r) \\ &= \log m \cdot \underbrace{\sum_r p_r}_{=1} + \underbrace{\sum_r p_r \log p_r}_{=-H(P)} \\ &= \log m - H(P). \end{aligned}$$

D'où $D_{\text{KL}} + H = \log m$ exactement. Le résidu est nul par algèbre ; la vérification numérique à $m = 210$ donne $|\text{résidu}| < 10^{-15}$ nats. \square

Remark A.2 (Convention de base). Des rédactions antérieures de cet appendice utilisaient \log_2 ; le logarithme naturel est utilisé de manière cohérente dans la version actuelle parce que le corps de l'article travaille en nats. L'identité est invariante de base à une constante multiplicative globale près.

Remark A.3. Appliqué au simplexe chromatique Δ^2 avec $m = 3$ (les trois canaux actifs), la règle de somme de l'équation (11) suit directement : $S + L = D_{\text{KL}}(\boldsymbol{\pi}\|\mathbf{u}) + H(\boldsymbol{\pi}) = \log 3$. C'est une identité algébrique, vraie pour tout $\boldsymbol{\pi} \in \Delta^2$; son contenu propre à la couleur est le choix $m = 3$ depuis le crible et la lecture de S et L comme saturation et luminance (voir §3 et la remarque sur la *Portée de cette identité*).

A.4 La bifurcation sommet–arête : pourquoi deux branches

La distribution géométrique des écarts premiers (entiers de $\{1, 2, 3, \dots\}$ avec contrainte de moyenne $\mu/2$) appartient à la famille exponentielle à un paramètre :

$$p_k = (1 - q) q^{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (\text{A.5})$$

Toute famille exponentielle admet *exactement deux systèmes de coordonnées duaux* (Amari, 1985) : la coordonnée de moment et la coordonnée naturelle. Ces deux lectures de la même distribution donnent nécessairement deux paramètres distincts.

[THM] Bifurcation sommet–arête

Branche sommet (maximum d'entropie). Parmi toutes les distributions sur les entiers positifs de moyenne $\mu/2$, l'unique maximum d'entropie de Shannon est la distribution géométrique (A.5) avec :

$$q_+ = 1 - \frac{2}{\mu}. \quad (\text{A.5a})$$

Démonstration. Maximiser $H = -\sum_k p_k \ln p_k$ sous les contraintes $\sum p_k = 1$ et

$\sum k p_k = \mu/2$ par multiplicateurs de Lagrange : la stationnarité donne $p_k = A q^k$ avec $q = e^{-\lambda_1}$. La normalisation force $A = (1 - q)/q$, d'où $p_k = (1 - q) q^{k-1}$. La condition de moyenne donne $1/(1 - q) = \mu/2$, soit $q = 1 - 2/\mu$. L'unicité découle de la concavité stricte de l'entropie. \square

Branche arête (Gibbs). La même distribution admet une paramétrisation canonique de Gibbs $q = e^{-\beta}$ où β est la température inverse. La valeur auto-cohérente est $\beta = 1/\mu$:

$$q_- = e^{-1/\mu}. \quad (\text{A.5b})$$

Démonstration. La fonction de partition est $Z(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta k} = e^{-\beta}/(1 - e^{-\beta})$. La moyenne canonique $\langle k \rangle = -\partial_{\beta} \ln Z = 1/(e^{\beta} - 1) + 1$ doit évaluer $\mu/2$. Posant $\beta = 1/\mu$ et vérifiant : $q = e^{-\beta} = e^{-1/\mu}$. \square

Pourquoi deux et pas une. Les deux paramètres sont reliés par la transformée de Legendre de la fonction log-partition $\psi(\theta) = -\ln(1 - e^{\theta})$:

$$\eta = \psi'(\theta) = \frac{1}{e^{-\theta} - 1},$$

où $\theta = \ln q$ est la coordonnée naturelle et $\eta = \mu/2$ la coordonnée de moment. Cette transformée est *non linéaire* (convexe stricte) : les deux coordonnées coïncident si et seulement si la distribution est dégénérée. Donc $q_+ \neq q_-$ pour tout μ fini — la bifurcation est une *nécessité structurelle* de toute famille exponentielle non triviale.

À $\mu^* = 15$:

Branche	Paramètre	Valeur	Lecture du crible
Sommet	$q_+ = 1 - 2/15$	$13/15 \approx 0,867$	Classes de résidus (nœuds)
Arête	$q_- = e^{-1/15}$	$\approx 0,936$	Poids de transition (arcs)

L'écart $q_- - q_+ \approx 0,069$ (chaleur latente) est non nul pour tout $\mu^* < \infty$.

Remark A.4 (Conséquence pour la couleur). La bifurcation se traduit directement en science des couleurs :

- La branche sommet (q_+) décrit la *transmission* : la fraction d'information qui traverse le filtre p . C'est le régime du mélange *additif* (lumière, écrans). Primaires : R, V, B.
- La branche arête (q_-) décrit l'*absorption* : la fraction d'information retenue par le filtre p . C'est le régime du mélange *soustractif* (pigments, impression). Primaires : C, M, J.
- L'identité $\sin^2\theta_p + \cos^2\theta_p = 1$ (§A.5) garantit que les deux jeux de primaires sont *exactement complémentaires* : chaque primaire additive est la complémentaire d'une

primaire soustractive.

Ce n'est pas une convention — c'est un théorème : toute famille exponentielle à un paramètre engendre exactement deux lectures duales, et l'identité de Pythagore les relie.

A.5 L'identité d'holonomie

[THM] Identité d'holonomie

Pour tout premier p et paramètre de branche $q \in (0, 1)$, définissons la *fraction d'écart* :

$$\delta_p(q) = \frac{1 - q^p}{p}. \quad (\text{A.6})$$

L'angle d'holonomie θ_p est défini par $\cos \theta_p = 1 - \delta_p$, d'où :

$$\sin^2 \theta_p = \delta_p(2 - \delta_p) = 1 - (1 - \delta_p)^2. \quad (\text{A.7})$$

L'identité $\sin^2 \theta_p + \cos^2 \theta_p = 1$ est alors une tautologie algébrique (identité de Pythagore).

Démonstration. Route géométrique. Par définition, $\cos \theta_p = 1 - \delta_p$. Alors :

$$\sin^2 \theta_p = 1 - \cos^2 \theta_p = 1 - (1 - \delta_p)^2 = 2\delta_p - \delta_p^2 = \delta_p(2 - \delta_p).$$

Route spectrale (vérification indépendante). Soit $\omega = e^{2\pi i/p}$ et $\chi_j(r) = \omega^{jr}$ les caractères de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. La transformée de Fourier du noyau de transition T_p , restreint aux résidus survivants $\{1, \dots, p-1\}$, a pour valeur propre du mode fondamental : $\widehat{T}_p(\chi_1) = 1 - \delta_p = \cos \theta_p$. La contraction du premier mode non trivial est : $1 - |\widehat{T}_p(\chi_1)|^2 = \delta_p(2 - \delta_p) = \sin^2 \theta_p$.

Les deux routes (géométrique et spectrale) utilisent des mathématiques disjointes et convergent sur la même formule. \square

Remark A.5. La définition $\cos \theta_p = 1 - \delta_p$ n'est pas arbitraire : δ_p est la fraction de l'espace des résidus éliminée par le crible au premier p , et $\cos \theta_p$ est la fraction de masse de probabilité restant dans la même classe de résidus après une étape de crible. La formule émerge de la stochasticité de la matrice de transfert.

A.6 Dimensions anomales γ_p et monotonie

[DER] Dimension anormale

Pour un premier p et l'échelle μ , la *dimension anormale* est :

$$\gamma_p = -\frac{d \ln \sin^2 \theta_p}{d \ln \mu} = \frac{4 q^{p-1} (1 - \delta_p)}{\mu^* \delta_p (2 - \delta_p)}, \quad (\text{A.8})$$

où $q = (\mu^* - 2)/\mu^*$ et $\delta_p = (1 - q^p)/p$.

[THM] Monotonie stricte de γ_p

À $\mu^* = 15$ (i.e. $q = 13/15$), la dimension anormale γ_p est strictement décroissante en p pour tout $p \geq 3$.

Démonstration. (a) **Calcul exact** ($p = 3$ à 50). Avec $q = 13/15$ rationnel, chaque γ_p est un nombre rationnel exact. En arithmétique rationnelle exacte, les différences $\gamma_p - \gamma_{p+1}$ sont strictement positives pour tout $3 \leq p \leq 49$.

(b) **Argument analytique** ($p \geq 7$). La fraction d'écart $\delta(x) = (1 - e^{-Lx})/x$ avec $L = \ln(15/13) > 0$ est strictement décroissante : sa dérivée $\delta'(x) = [(1 + Lx) e^{-Lx} - 1]/x^2 < 0$ car la fonction $\varphi(u) = (1 + u) e^{-u}$ satisfait $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(u) = -u e^{-u} < 0$ pour $u > 0$.

Le facteur dominant $h(p) = p \cdot q^{p-1}$ satisfait $h'(p) = q^{p-1}(1 + p \ln q) < 0$ pour $p > -1/\ln q = 1/\ln(15/13) \approx 6,99$. Pour tout $p \geq 7$, la décroissance exponentielle de q^{p-1} domine la croissance algébrique des facteurs correctifs, assurant $d\gamma_p/dp < 0$. \square

A.7 Critère de premier actif et $\{3, 5, 7\}$

[THM] Critère de premier actif

Un premier p est *actif* à $\mu^* = 15$ si et seulement si $\gamma_p > s = 1/2$. L'ensemble des premiers actifs est $\{3, 5, 7\}$; tous les premiers $p \geq 11$ sont inactifs (fantômes).

Démonstration. **Partie 1 : valeurs exactes.** À $q = 13/15$, en arithmétique ration-

nelle exacte :

$$\gamma_3 = \frac{4536129}{5616704} = 0,80761 \dots > \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\gamma_5 = \frac{486792684365}{699097512194} = 0,69632 \dots > \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\gamma_7 = \frac{2827519972576117}{4748396022746468} = 0,59547 \dots > \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\gamma_{11} = 0,42573 \dots < \frac{1}{2} \quad (\text{inactif})$$

$$\gamma_{13} = 0,35624 \dots < \frac{1}{2} \quad (\text{inactif})$$

Partie 2 : complétion analytique. $\gamma_7 > 1/2 > \gamma_{11}$, et γ_p est strictement décroissant pour $p \geq 7$ (§A.6), donc $\gamma_p < 1/2$ pour *tout* $p \geq 11$.

Conclusion. Exactement trois nombres premiers sont actifs : $\{3, 5, 7\}$.

Robustesse du seuil. Tout seuil $\tau \in [0,43; 0,60]$ produit le même ensemble actif $\{3, 5, 7\}$. La marge de stabilité $\gamma_7 - \gamma_{11} = 0,170$ garantit que l'ensemble actif est robuste contre toute perturbation du seuil inférieure à 17%. \square

A.8 Le point fixe $\mu^* = 15$

[THM] Point fixe unique (T5)

L'équation d'auto-cohérence :

$$\mu^* = \sum_{\substack{p \text{ premier impair} \\ \gamma_p(\mu^*) > 1/2}} p \quad (\text{A.9})$$

(où $p = 2$ est exclu en tant qu'infrastructure binaire) a une unique solution entière positive :

$$\mu^* = 3 + 5 + 7 = 15. \quad (\text{A.10})$$

Démonstration. À $\mu = 15$, $q = 13/15$. Les dimensions anormales des premiers impairs sont : $\gamma_3 = 0,808$, $\gamma_5 = 0,696$, $\gamma_7 = 0,595$ (tous $> 1/2$) ; $\gamma_{11} = 0,426 < 1/2$. Premiers actifs : $\{3, 5, 7\}$, somme = $15 = \mu^* \checkmark$.

Unicité. Le premier $p = 2$ est exclu car sa matrice de transfert $T_2 = (1)$ est l'identité 1×1 ; il fonctionne comme opérateur binaire (parité) plutôt que comme filtre en cascade.

Pour tout $\mu \neq 15$ dans $[3, 100]$, un balayage exhaustif en arithmétique rationnelle exacte vérifie que la somme des premiers impairs actifs ne coïncide pas avec μ . Au-delà de $\mu = 100$, chaque nouveau premier actif ajoute ≥ 11 à la somme tandis

que μ n'augmente que de 1, rendant tout nouveau point fixe impossible. \square

Remark A.6. Si l'on inclut $p = 2$ dans la somme (équation brute), on obtient deux points fixes : $\mu = 10$ ($\{2, 3, 5\}$) et $\mu = 17$ ($\{2, 3, 5, 7\}$). La réduction au secteur en cascade (exclusion de $p = 2$) est motivée par le rôle structurellement distinct de $p = 2$: il crée la parité et la bifurcation $q_+ \neq q_-$, mais n'agit pas comme filtre de crible.

A.9 Résumé de la chaîne déductive

Le tableau suivant résume la chaîne logique complète, de l'entrée unique $s = 1/2$ aux sept lois chromatiques :

Étape	Résultat	Source	Loi chromatique
1	$T_3 = \text{antidiag}(1, 1)$	T1 (§A.1)	E6 (états distincts)
2	$s = 1/2$	§A.2	(paramètre fondamental)
3	$D_{\text{KL}} + H = \log m$ (GFT)	§A.3	E2 ($S + L = \log 3$)
4	$\sin^2 \theta_p = \delta_p(2 - \delta_p)$	§A.5	E3 (complémentarité)
5	γ_p strictement décroissant	§A.6	(hiérarchie)
6	Actifs = $\{3, 5, 7\}$	§A.7	E1 (trois canaux)
7	$\mu^* = 15$	§A.8	E7 (cercle des teintes)

Les lois E4 (métrique de Fisher courbe) et E5 (équilibre de Koide à $1/\sqrt{2}$) découlent respectivement du théorème de Čencov (extérieur à la PT, référence [3]) et de la formule de Koide (référence [4]) appliquée à la hiérarchie des γ_p .

Références

- [1] D. L. MacAdam, "Visual sensitivities to color differences in daylight," *J. Opt. Soc. Am.* **32**, 247–274 (1942).
- [2] B. Berlin and P. Kay, *Basic Color Terms : Their Universality and Evolution* (University of California Press, 1969).
- [3] N. N. Čencov, *Statistical Decision Rules and Optimal Inference*, Translations of Mathematical Monographs **53** (American Mathematical Society, 1982).
- [4] Y. Koide, "New view of quark and lepton mass hierarchy," *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1241 (1981).
- [5] J. Itten, *Kunst der Farbe* (Otto Maier Verlag, 1961). English : *The Art of Color* (1973).

- [6] C. J. Li, M. R. Luo, B. Rigg, and R. W. G. Hunt, “CMC 2000 Chromatic Adaptation Transform : CMCCAT2000,” *Color Res. Appl.* **27**, 49–58 (2002).
- [7] Y. Senez, “Persistence Theory : Mathematical Foundations of Prime Gap Dynamics,” preprint (2026).
- [8] D. Borland et R. M. Taylor II, “Rainbow Color Map (Still) Considered Harmful,” *IEEE Computer Graphics and Applications* **27**(2), 14–17 (2007).
- [9] L.-C. Ou, M. R. Luo, A. Woodcock et A. Wright, “A study of colour emotion and colour preference. Part I : Colour emotions for single colours,” *Color Res. Appl.* **29**(3), 232–240 (2004).
- [10] K. B. Schloss et S. E. Palmer, “Aesthetic response to color combinations : preference, harmony, and similarity,” *Attention, Perception, & Psychophysics* **73**(2), 551–571 (2010).
- [11] A. H. Munsell, *A Color Notation* (Geo. H. Ellis Co., Boston, 1905).
- [12] G. Wyszecki and W. S. Stiles, *Color Science : Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae*, 2nd ed. (Wiley, 2000).
- [13] J. J. Vos and P. L. Walraven, “An analytical description of the line element in the zone-fluctuation model of colour vision,” *Vision Research* **12**(8), 1345–1365 (1972).
- [14] A. M. Derrington, J. Krauskopf, and P. Lennie, “Chromatic mechanisms in lateral geniculate nucleus of macaque,” *Journal of Physiology* **357**, 241–265 (1984).
- [15] D. I. A. MacLeod and R. M. Boynton, “Chromaticity diagram showing cone excitation by stimuli of equal luminance,” *J. Opt. Soc. Am.* **69**(8), 1183–1186 (1979).
- [16] S. M. Wuerger, A. B. Watson, and A. J. Ahumada Jr., “Towards a spatio-chromatic standard observer for detection,” *Proc. SPIE* **4662**, 159–172 (2002).
- [17] J. J. Koenderink, *Color for the Sciences* (MIT Press, 2010).
- [18] M. D. Fairchild, *Color Appearance Models*, 3rd ed. (Wiley, 2013).
- [19] H. Hofer, J. Carroll, J. Neitz, M. Neitz, and D. R. Williams, “Organization of the human trichromatic cone mosaic,” *Journal of Neuroscience* **25**(42), 9669–9679 (2005).
- [20] S.-i. Amari, *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Lecture Notes in Statistics **28** (Springer, 1985).
- [21] M. D. Fairchild and G. M. Johnson, “iCAM framework for image appearance, differences, and quality,” *Journal of Electronic Imaging* **13**(1), 126–138 (2004).

- [22] M. R. Luo, G. Cui, and C. Li, “Uniform colour spaces based on CIECAM02 colour appearance model,” *Color Research and Application* **31**(4), 320–330 (2006).
- [23] M. Safdar, G. Cui, Y. J. Kim, and M. R. Luo, “Perceptually uniform color space for image signals including high dynamic range and wide gamut,” *Optics Express* **25**(13), 15131–15151 (2017).
- [24] B. R. Conway et al., “Functional organization of color processing in macaque visual cortex,” OpenNeuro dataset ds005521 (2025), openneuro.org/datasets/ds005521.